54858

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XV.

1953—1954

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XV.

1953—1954.

SZEGED.

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

15. KÖTET

1953—1954.

SZEGED.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX. — TARTALOM.

Tomus XV. — 1953/54. — 15. kötet.

BIBLIOGRAPHIE.

Felelős szerkesztő: Szőkefalvi-Nagy Béla

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54-1728 Felelős vezető: Vincze György

On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions.

By E. EGERVÁRY in Budapest.

Notations.

$a, b, c, \ldots$ scalars	$\mathbf{A}^* =$ transposed of $\mathbf{A}$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ column vectors	$\lvert\mathbf{A}\rvert =$ determinant of $\mathbf{A}$
$\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*, \ldots$ row vectors	$\mathbf{E} = [\delta_{ij}] =$ unit matrix
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ matrices	$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle =$ diagonal matrix

1. Let $\mathbf{A}$ be a non singular square matrix of order n, and suppose that the adjoint of $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$ is divisible by the discriminant of $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = D(\lambda) = \prod_1^s (\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$ $(s \leqq n, \Sigma\alpha_k = n)$, i. e. that the roots $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ of the minimum-equation $\Delta(\lambda) = \prod_1^s (\lambda-\lambda_k) = 0$ of $\mathbf{A}$ are all distinct[1]).

It is known that in this case there is a system $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ of linearly independent right eigenvectors satisfying $\mathbf{A}\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, and a system $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ of linearly independent left eigenvectors satisfying $\mathbf{w}_k^*\mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{w}_k^*$, such that the systems $\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$ are reciprocal, i. e. they satisfy $\mathbf{w}_k^*\mathbf{v}_l = \delta_{kl}$. Furthermore it is known that the transformation of the matrix $\mathbf{A}$ to the basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ or to the basis $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ reduces it to the diagonal form $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots \rangle$.

In view of the importance of these theorems in the applications (transformation of a quadric to its principal axes, introduction of normal coordinates in a dynamical system, matrix solution of a system of linear differential equations etc.) it seems to be desirable to have a concise method for the computation of the reciprocal systems of eigenvectors.

If the eigenvalues λ_k are all distinct, then the solutions of the equations $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_k \mathbf{v}$ resp. $\mathbf{w}^*\mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{w}^*$ are, apart from a scalar factor, uniquely deter-

[1]) If $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}$ i. e. if $\mathbf{A}$ is hermitian then the eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ are all real and the divisibility of $\operatorname{adj}(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})$ by $(D(\lambda), D'(\lambda))$ is an immediate consequence of the identity $\sum_p \sum_q D_{pq}(\lambda)\overline{D}_{pq}(\lambda) = D'(\lambda)^2 - D(\lambda)D''(\lambda)$.

mined, hence in this case the computation of the eigenvectors by the solution of the corresponding system of linear equations is comparatively simple.

In case of multiple eigenvalues the usual way of computation of the eigenvectors is an awkward and lengthy business[2]). First of all one has to find the rank of $\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}$ and a complete system of solutions of $(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{v} = 0$ as well as of $\mathbf{w}^*(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$, and afterwards these two systems must be biorthogonalised and normalised.

2. In the present paper I wish to indicate a concise, straightforward method for the computation of the reciprocal systems of eigenvectors, based on a remarkable property of the projector matrices which, as far as I am aware, does not seem to have been noticed hitherto.

A square matrix $\mathbf{P}$ is a projector if it satisfies the equation $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. If $\mathbf{P}$ is a non singular projector then we have obviously $\mathbf{P} = \mathbf{E}$. Therefore we confine ourselves to the consideration of a singular projector whose rank $\varrho(\mathbf{P})$ satisfies $1 \leqq \varrho(\mathbf{P}) \leqq n-1$.

Any matrix $\mathbf{A}$ with n rows and m columns having the rank r can be represented in a form making its rank intuitive[3]):

$$(1) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \\ c_{r1} & \dots & c_{rm} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{c}_r^* \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{b}_k \mathbf{c}_k^*$$

in which $\mathbf{B}$ is a matrix with r linearly distinct column vectors and $\mathbf{C}$ is a matrix with r linearly distinct row vectors. The simplest way of this factorisation of a given matrix, which necessitates only the computation of second order determinants, is the following one. If $\varrho(\mathbf{A}) \geqq 1$, then there is at least one non vanishing element $a_{\beta\gamma}$. Then the difference

$$a_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ a_{2\gamma} \\ \vdots \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix} [a_{\beta 1}\, a_{\beta 2} \dots a_{\beta m}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \gamma & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a'_{11} \dots & 0 & \dots a'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \;\dots & 0 & \dots\; 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} \dots & 0 & \dots a'_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\beta \\ \\ \\ \end{array} = \mathbf{A}'$$

is a matrix with one 0-column and one 0-row, while its further elements a'_{ij} are second order determinants of $\mathbf{A}$. Applying now the same process to $\mathbf{A}'$ we arrive to a matrix with two 0-columns and two 0-rows whose further

---

[2]) Compare f.i. the examples given in W. E. Jung, *Matrizen und Determinanten* (Leipzig, 1951), pp. 97—99.

[3]) In case of square matrices this theorem is stated without proof in R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar, *Elementary matrices* (Cambridge, 1938), p. 20. See also A. И. Мальцев, Основы линейной алгебры (Москва, 1948), p. 117. Another method for the factorization of non-singular matrices is given in R. Zurmühl, Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz, *Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech.*, 29 (1949), pp. 76—84.

elements are second order determinants of $\mathbf{A}'$, hence proportional to the third-order determinants of $\mathbf{A}$[4]). After r steps we arrive to a matrix $\mathbf{A}^{(r)}$ whose elements are proportional to the $r+1$-th order determinants of $\mathbf{A}$ which vanish by assumption and the factorisation is finished.

In case of a hermitian projector we have $\mathbf{P}=\mathbf{P}^2=\mathbf{P}\bar{\mathbf{P}}^*$, therefore $\mathbf{P}$ is positive semidefinite and one can select a sequence of principal minors $a_{\beta_1\beta_1}, \begin{vmatrix} a_{\beta_1\beta_1} & a_{\beta_1\beta_2} \\ a_{\beta_1\beta_2} & a_{\beta_2\beta_2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{\beta_1\beta_1} & \cdots & \\ & \cdots & a_{\beta_r\beta_r} \end{vmatrix}$ which are positive. Choosing these as starting elements in the former process of reduction the two factor matrices will be hermitically conjugated.

3. If the matrix $\mathbf{A}$ is a projector then the former representation can be characterised in a more precise way:

Theorem. *If a projector matrix* $\mathbf{P}$ *of order* n *and rank* r *is represented in the form*

$$\mathbf{P}=[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_r]\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1^*\\ \mathbf{w}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{w}_r^*\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{r}\mathbf{v}_k\mathbf{w}_k^*, \tag{2}$$

then the two systems of vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ *and* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r$ *occurring in* (2) *are automatically biorthogonalised and normalised i. e. they satisfy the relations*

$$[\mathbf{w}_i^*\mathbf{v}_j]=\mathbf{E} \quad or \quad \mathbf{w}_i^*\mathbf{v}_j=\delta_{ij}.$$

Proof. The projector $\mathbf{P}$ satisfies the equation $\mathbf{P}^2-\mathbf{P}=0$; using the representation (2) this can be written as follows:

$$[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_r]\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1^*\\ \mathbf{w}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{w}_r^*\end{bmatrix}[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_r]-\mathbf{E}\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1^*\\ \mathbf{w}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{w}_r^*\end{bmatrix}=0.$$

But the first and the last factors on the left side of this matrix equation have the maximal rank r, hence the middle-factor in the bracket must vanish[5]), i. e.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1^*\\ \mathbf{w}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{w}_r^*\end{bmatrix}[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_r]=\mathbf{E}.$$

Q. e. d.

[4]) This is an immediate consequence of the well-known identity $A_{ik}A_{jl}-A_{il}A_{jk}=A.A_{\substack{ij\\kl}}$.

[5]) This follows immediately by considering the minor matrix of the product, whose right and left factors are not singular r-th order square matrices.

Corollary. A hermitian projector matrix $\mathbf{P}$ of order n and rank r can be represented in the form

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_r] \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1^* \\ \bar{\mathbf{v}}_2^* \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{v}}_r^* \end{vmatrix}$$

where the vectors $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_r$ form a unitary set, i. e. they satisfy the relations

$$\bar{\mathbf{v}}_i^* \mathbf{v}_j = \delta_{ij}.$$

4. Suppose now that the matrix $\mathbf{A}$ satisfies the assumptions made in **1** and consider the matrix $f(\mathbf{A})$ where $f(\lambda)$ is an arbitrary scalar polynomial[6]) of λ. Denoting by $L_k(\lambda)$ the Lagrangian interpolation polynomials defined by the conditions

$$\text{degree of } L_k(\lambda) \leqq s-1$$
$$L_k(\lambda_h) = \delta_{k,h} \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, s)$$

we have

$$f(\lambda) \equiv \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) L_k(\lambda) \pmod{\Delta(\lambda)},$$

consequently

(3)
$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) L_k(\mathbf{A})\,{}^{7)}.$$

From

$$(\lambda - \lambda_k) L_k(\lambda) \equiv 0 \;(\text{mod. } \Delta(\lambda))$$

we deduce immediately

(4)
$$(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) L_k(\mathbf{A}) = 0, \qquad L_k(\mathbf{A})(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0.$$

Hence the column vectors of $L_k(\mathbf{A})$ are right eigenvectors, the row vectors of $L_k(\mathbf{A})$ are left eigenvectors belonging to λ_k. The number of the linearly distinct right and left eigenvectors (the dimension of the right and left eigenmanifolds) belonging to λ_k is evidently equal to the nullity $n - \varrho(L_k(\mathbf{A}))$ of $L_k(\mathbf{A})$.

The polynomials $L_k(\lambda)$ satisfy the identity

$$\sum_{1}^{s} L_k(\lambda) \equiv 1,$$

hence

$$\sum_{1}^{s} L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{E},$$

---

[6]) In order to avoid limit-processes we confine ourselves here to the consideration of polynomials.

[7]) The Lagrangian interpolation formula has been used first in matrix-theory by J. J. Sylvester, *Philosophical Magazine*, **16** (1883), 267—269.

consequently

$$(5.\,1)\qquad \sum_{1}^{s} \varrho(L_k(\mathbf{A})) \geqq \varrho\left(\sum_{1}^{s} L_k(\mathbf{A})\right) = \varrho(\mathbf{E}) = n = \sum_{1}^{s} \alpha_k \text{ }^{8}).$$

On the other side, for the eigenvalue λ_k of multiplicity α_k we have

$$(5.\,2)\qquad \varrho(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) \geqq n - \alpha_k$$

and in consequence of (4)

$$(5.\,3)\qquad \varrho(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) + \varrho(L_k(\mathbf{A})) \leqq n \text{ }^{8}).$$

From (5. 2) and (5. 3) we deduce

$$(5.\,4)\qquad \varrho(L_k(\mathbf{A})) \leqq \alpha_k, \quad \sum_{1}^{s} \varrho(L_k(\mathbf{A})) \leqq \sum_{1}^{s} \alpha_k .$$

Comparison of (5. 1) and (5. 4) shows immediately that

$$(5.\,5)\qquad \varrho(L_k(\mathbf{A})) = \alpha_k ,$$

i. e. the number of the linearly distinct right and left eigenvectors belonging to λ_k is equal to the multiplicity α_k.

5. The construction of the reciprocal systems of right and left eigenvectors will be now based upon the following properties of the Lagrangian matrix polynomials $L_h(\mathbf{A})$:

$$(\mathrm{I})\qquad L_k(\lambda) L_h(\lambda) \equiv 0 \pmod{J(\lambda)} \qquad (k \neq h),$$

hence

$$(6)\qquad L_k(\mathbf{A}) L_h(\mathbf{A}) = 0 \qquad (k \neq h);$$

$$(\mathrm{II})\qquad L_k(\lambda)^2 - L_k(\lambda) \equiv 0 \pmod{J(\lambda)},$$

hence

$$(7)\qquad L_k(\mathbf{A})^2 = L_k(\mathbf{A}).$$

The interpretation of the property (I) in the geometry of vector space is obvious by the decomposition (1) of $L_k(\mathbf{A})$ and $L_h(\mathbf{A})$:

$$L_k(\mathbf{A})\, L_h(\mathbf{A}) = [\mathbf{v}_{k1} \ldots \mathbf{v}_{k\alpha_k}] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}^*_{k1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^*_{k\alpha_k} \end{bmatrix} [\mathbf{v}_{h1} \ldots \mathbf{v}_{h\alpha_h}] \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^*_{h1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^*_{h\alpha_h} \end{bmatrix} = 0.$$

The first and last factors have maximal ranks α_k resp. α_h, hence the middle-factor in the bracket must vanish, consequently

$$(8.\,1)\qquad \mathbf{v}^*_{ki}\, \mathbf{w}_{hj} = 0 \qquad (k \neq h).$$

Thus, we have arrived by this method to the well-known fact that any right eigenvector and any left eigenvector, which belong to different eigenvalues, are orthogonal.

---

[8]) Here we use the following elementary theorems. The rank of a sum cannot exceed the sum of the ranks of the terms and if the product of two square matrices is null the sum of their ranks cannot exceed their order. See f. i. FRAZER, DUNCAN and COLLAR, l. c., p. 23.

The property (II) shows that each Lagrangian matrix polynomial is a projector. But the real counterpiece to the former interpretation of (I) is furnished by the application of the theorem proved in § 3.

If a Lagrangian matrix polynomial of rank α_k is decomposed into two factors

(1. 1) $$L_k(\mathbf{A}) = [\mathbf{v}_{k1} \ldots \mathbf{v}_{k\alpha_k}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k\alpha_k} \end{bmatrix} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha_k} \mathbf{v}_{k\varkappa} \mathbf{w}_{k\varkappa}^*,$$

then the vectors $\mathbf{v}_{k1}, \ldots, \mathbf{v}_{k\alpha_k}$ *and* $\mathbf{w}_{k1}, \ldots, \mathbf{w}_{k\alpha_k}$ *constitute a system of* α_k *linearly distinct right resp. left eigenvectors such that the two systems are automatically biorthogonalised and normalised*:

(8. 2) $$\mathbf{v}_{ki}^* \mathbf{w}_{kj} = \delta_{ij}.$$

The equations (8. 1) and (8. 2) can be united into the single system of equations

(8) $$\mathbf{v}_{ki}^* \mathbf{w}_{hj} = \delta_{kh}\, \delta_{ij} \qquad \begin{pmatrix} k, h = 1, 2, \ldots, s \\ i = 1, 2, \ldots, \alpha_k \\ j = 1, 2, \ldots, \alpha_h \end{pmatrix}.$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_{11} \ldots \mathbf{v}_{1\alpha_1} \ldots \mathbf{v}_{s1} \ldots \mathbf{v}_{s\alpha_s}] \\ \mathbf{W} &= [\mathbf{w}_{11} \ldots \mathbf{w}_{1\alpha_1} \ldots \mathbf{w}_{s1} \ldots \mathbf{w}_{s\alpha_s}] \end{aligned} \qquad \left(\sum_1^s \alpha_k = n\right)$$

are reciprocal matrices of order n.

Replacing now in (3) the Lagrangian matrix polynomials by their expressions (1. 1) we arrive at the following representation of $f(\mathbf{A})$:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k)(\mathbf{v}_{k1}\mathbf{w}_{k1}^* + \cdots + \mathbf{v}_{k\alpha_k}\mathbf{w}_{k\alpha_k}^*) = \mathbf{V} \langle f(\lambda_1) \ldots f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_s) \ldots \rangle \mathbf{V}^{-1}$$

In the special case $f(\lambda) \equiv \lambda$ we get from here the diagonal representation of the matrix $\mathbf{A}$ itself.

(Received March 15, 1953.)

Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie.

Von L. RÉDEI in Szeged und A. STÖHR in Göttingen.

Stets bezeichnen G, Γ zwei fest angegebene Gruppen, $a, b, \ldots$ bzw. $\alpha, \beta, \ldots$ ihre Elemente, insbesondere e, ε ihre Einselemente. Bequemlichkeitshalber nehmen wir an, daß G, Γ kein gemeinsames Element haben.

Für gewisse, sehr allgemeine (im wesentlichen auf HAMILTON zurückgehende) Konstruktionen von algebraischen Strukturen haben wir in einer früheren Arbeit [3][1]) die Benennung *schiefes Produkt* eingeführt. Insbesondere haben wir dort für die Gruppen G, Γ ein schiefes Produkt $G \circ \Gamma$ ausführlich untersucht, das so entsteht, daß man in der Menge aller Paare (a, α) eine Multiplikation

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha} \beta^{\alpha}, a^{b} \alpha^{b} \beta)$$

definiert, wobei

$$b^{\alpha}, \beta^{\alpha} (\in G); \; a^{b}, \alpha^{b} (\in \Gamma)$$

irgendwelche vier Funktionen von je zwei Variabeln sind. Unter anderem haben wir die Bedingungen aufgestellt (s. Arbeit [3], Satz 1), denen diese vier Funktionen zu genügen haben, damit $G \circ \Gamma$ eine Gruppe ist. Diese Gruppen sind sehr allgemein, denn werden die den Spezialfällen

$$(1) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^{b} \alpha^{b} \beta),$$

$$(2) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha}, \alpha^{b} \beta)$$

entsprechenden schiefen Produkte mit $G_1 \Gamma$ bzw. $G_2 \Gamma$ bezeichnet, so gilt, daß die Theorie der Gruppen $G_1 \Gamma, G_2 \Gamma$ mit der Schreierschen bzw. Zappa—Szépschen Erweiterungstheorie der Gruppen zusammenfällt (s. [3], Sätze 3, 6). Umgekehrt hat KOCHENDÖRFFER [2] neulich gezeigt, daß sich die Gruppen vom Typ $G \circ \Gamma$ auf eine sehr einfache Weise durch Konstruktion von Gruppen vom Typ $G_1 \Gamma$ und $G_2 \Gamma$ gewinnen lassen. Wir erwähnen ferner, daß FUCHS [1] das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ auf den Fall verallgemeinert hat, daß G, Γ mit einem gemeinsamen Operatorbereich versehen sind.

Man würde gerne nach wesentlich neuen Typen von aus G, Γ gebildeten

---

[1]) Mit [ ] wird auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit verwiesen.

schiefen Produkten suchen, die zur Konstruktion von Gruppen ebenfalls gut eignen. Von diesem Bestreben geleitet untersuchen wir in dieser Arbeit das schiefe Produkt $G^{2'}\Gamma$, das von den obigen darin abweicht, daß in ihm die Multiplikation durch

$$(2') \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta} b, \alpha^{b} \beta)$$

definiert wird. Obwohl sich (2') nach dem äußeren Anschein stark von (2) unterscheidet, werden wir das „negative" aber in theoretischer Hinsicht interessante Resultat erhalten, daß die Gruppen $G^{2'}\Gamma$ nichts wesentlich neues bieten, sondern daß sie (im abstrakten Sinne) eine echte Teilmenge aller Gruppen $G^{2}\Gamma$ bilden, womit wir meinen, daß jede Gruppe $G^{2'}\Gamma$ isomorph mit einer Gruppe $G^{2}\Gamma$ ist, aber nicht umgekehrt.[2])

Als Vorbereitung zeigen wir, daß jede Gruppe $G^{2'}\Gamma$ mit einer solchen Gruppe $G^{2'}\Gamma$ isomorph ist, die (e, ε) zum Einselement hat.

Betrachten wir nämlich eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G} = G^{2'}\Gamma$. Bezeichnen wir mit Π die Permutation

$$(3) \qquad (a, \alpha) \to (r^{-1} a, \varrho^{-1} \alpha)$$

der Elemente von $\mathfrak{G}$, wobei r, ϱ je ein Element von G bzw. Γ ist. Wird dann in der Menge der (a, α) die „neue" Multiplikation

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta))$$

definiert, so entsteht (s. [3], § 2) eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}_1$, und zwar wird $\mathfrak{G}$ durch (3) isomorph auf $\mathfrak{G}_1$ abgebildet. Da Π^{-1} die Permutation

$$(a, \alpha) \to (ra, \varrho\alpha)$$

ist, so folgt aus (2') sofort

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = (r^{-1}(ra)^{\varrho\beta} rb, \varrho^{-1}(\varrho\alpha)^{rb} \varrho\beta).$$

Die rechte Seite ist von derselben Form wie die von (2'); der einzige Unterschied ist, daß an Stelle des Funktionenpaars a^{β}, α^{b} das ähnlich beschaffene Funktionenpaar

$$r^{-1}(ra)^{\varrho\beta} r, \quad \varrho^{-1}(\varrho\alpha)^{rb} \varrho$$

getreten ist. Hiernach ist auch $\mathfrak{G}_1$ eine der Gruppen $G^{2'}\Gamma$. Werden noch r, ϱ so spezialisiert, daß (r, ϱ) eben das Einselement von $\mathfrak{G}$ bezeichnet, so gilt wegen des Isomorphismus (3) auch, daß $\mathfrak{G}_1$ das Einselement (e, ε) hat. Die Behauptung haben wir bewiesen.

Deshalb dürfen wir uns fortan auf die Gruppen $G^{2'}\Gamma$ beschränken, die das Einselement (e, ε) haben. Wir beweisen nunmehr den folgenden:

---

[2]) Das erscheint paradox, denn nach (2), (2') sind beide schiefen Produkte $G^{2}\Gamma$, $G^{2'}\Gamma$ von zwei willkürlichen Funktionen der gleichen Form $r^{\varrho}(\in G)$, $\varrho^{r}(\in \Gamma)$ abhängig ($r \in G$, $\varrho \in \Gamma$). Die Erklärung ist, wie es aus unseren Ausführungen sichtbar wird, daß die Forderung der Assoziativität für $G^{2'}\Gamma$ einschneidender ist als für $G^{2}\Gamma$.

S a t z. *Damit ein durch* (2′) *definiertes schiefes Produkt* $\mathfrak{G} = G^{2'} \Gamma$ *eine Gruppe mit dem Einselement* (e, ε) *ist, ist notwendig und hinreichend, daß*

(4) $$a^{\varepsilon} = a, \quad \alpha^{e} = \alpha, \qquad e^{\alpha} = e, \quad \varepsilon^{a} = \varepsilon,$$

(5) $$a^{\beta\gamma} = (a^{\beta})^{\gamma}, \qquad \alpha^{bc} = (\alpha^{b})^{c},$$

(6) $$(ab)^{\gamma} = a^{\gamma} b^{\gamma}, \qquad (\alpha\beta)^{c} = \alpha^{c} \beta^{c}.$$

(7) $$a^{\beta^{c}} = a^{\beta}, \qquad \alpha^{b^{\gamma}} = \alpha^{b}$$

gelten. Jede solche Gruppe $\mathfrak{G} = G^{2'} \Gamma$ *ist zu derjenigen Gruppe* $\mathfrak{G}_0 = G^{2} \Gamma$ *isomorph, in der die Elemente nach der Regel*

(8) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha^{-1}}, \alpha^{b} \beta)$$

multipliziert werden. Dabei ist

(9) $$(a, \alpha) \rightarrow (a^{\alpha^{-1}}, \alpha)$$

eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ *auf* $\mathfrak{G}_0$.

B e m e r k u n g. Das in (8) figurierende Funktionenpaar $b^{\alpha^{-1}}$, α^{b} genügt nach (4) bis (7) den Bedingungen

$$a^{\varepsilon^{-1}} = a, \quad \alpha^{e} = \alpha, \qquad e^{\alpha^{-1}} = \alpha, \quad \varepsilon^{a^{-1}} = \varepsilon$$

$$a^{(\beta\gamma)^{-1}} = (a^{\gamma^{-1}})^{\beta^{-1}}, \qquad \alpha^{bc} = (\alpha^{b})^{c},$$

$$(ab)^{\gamma^{-1}} = a^{\gamma^{-1}} b^{\gamma^{-1}}, \qquad (\alpha\beta)^{c} = \alpha^{c} \beta^{c},$$

$$a^{(\beta^{c})^{-1}} = a^{\beta^{-1}}, \qquad \alpha^{b^{\gamma^{-1}}} = \alpha^{b}.$$

Hiernach sind die im Satz erwähnten Gruppen $\mathfrak{G}_0 = G^{2} \Gamma$ lauter solche Gruppen, die auch im Satz 11 der Arbeit [3] betrachtet wurden. Man sieht hieraus auch, daß die Gruppen $G^{2'} \Gamma$ nicht alle Gruppen $G^{2} \Gamma$ erschöpfen, sondern nur die einfachsten unter ihnen, die allerdings eine interessante Klasse von Gruppen bilden. (Vgl. auch Szép [4].)

B e w e i s d e s S a t z e s. Vor allem folgt aus (2′) sofort, daß (4) notwendig und hinreichend dafür ist, daß $\mathfrak{G}$ das Einselement (e, ε) hat. Fortan nehmen wir (4) schon an.

Unter dieser Annahme wollen wir dann die Bedingung der Assoziativität für $\mathfrak{G}$ aufstellen. Diese lautet nach (2′) vorläufig

$$(a^{\beta} b, \alpha^{b} \beta)(c, \gamma) = (a, \alpha)(b^{\gamma} c, \beta^{c} \gamma).$$

Wieder nach (2′) läßt sich hierfür

$$((a^{\beta} b)^{\gamma} c, (\alpha^{b} \beta)^{c} \gamma) = (a^{\beta^{c}\gamma} b^{\gamma} c, \alpha^{b^{\gamma} c} \beta^{c} \gamma)$$

schreiben. Dies spaltet sich in die zwei Gleichungen

(10) $$(a^{\beta} b)^{\gamma} = a^{\beta^{c}\gamma} b^{\gamma}, \quad (\alpha^{b} \beta)^{c} = \alpha^{b^{\gamma} c} \beta^{c}$$

auf.

Zunächst zeigen wir, daß aus (10) (und (4)) die Gleichungen (5) bis (7) folgen. Hierzu setzen wir in (10_1), (10_2) $\beta = \varepsilon$ bzw. $b = e$ ein und kommen mit Hilfe von (4) zu den Gleichungen (6). Aus (10) und (6) folgt

$$(a^{\beta})^{\gamma} = a^{\beta^c \gamma}, \quad (\alpha^b)^c = \alpha^{b^{\gamma} c}.$$

Wird hier einmal $c = e$, andermal $\gamma = \varepsilon$ eingesetzt, so entstehen nach (4) die vier Gleichungen (5), (7). Umgekehrt ist klar, daß aus (5) bis (7) die Gleichungen (10) folgen.

Bisher haben wir bewiesen, daß (4) bis (7) notwendig und hinreichend sind, damit $\mathfrak{G}$ assoziativ ist und das Einselement (e, ε) hat. Ist das der Fall, so ist aber $\mathfrak{G}$ auch schon eine Gruppe, denn aus (2′), (5), (4) folgt

$$((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1})^{a^{-1}})(a, \alpha) = (e, \varepsilon)$$

d. h. die Existenz des Inversen in $\mathfrak{G}$. Wir haben die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Um die zweite Hälfte zu beweisen, betrachten wir eine Gruppe $\mathfrak{G} = G^{2\prime}\Gamma$, definiert durch (2′), (4) bis (7). Wir bemerken vor allem, daß dann bei jedem $\varrho (\in \Gamma)$

$$a \to a^{\varrho}$$

eine Permutation der Elemente von G ist. Das stimmt, denn aus der Annahme $a^{\varrho} = b^{\varrho}$ folgt wegen (5_1) zunächst $a^{\varepsilon} = b^{\varepsilon}$, dann hieraus nach (4_1) $a = b$.

Wegen des bewiesenen ist (9) eine Permutation Π der Elemente von $\mathfrak{G}$. Also ist Π^{-1} (wieder wegen (4_1), (5_1)) die Permutation

$$(a, \alpha) \to (a^{\alpha}, \alpha). \tag{11}$$

Führen wir in $\mathfrak{G}$ die neue Multiplikation

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta)) \tag{12}$$

ein. Nach der Arbeit [3], § 2 entsteht so eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe, auf die $\mathfrak{G}$ durch (9) isomorph abgebildet wird. Wenn wir also zeigen, daß die rechte Seite von (12) mit der von (8) übereinstimmt, so werden wir die zweite Hälfte das Satzes bewiesen haben.

Nach (2′), (4) bis (7) und der Bedeutung von Π berechnet sich die rechte Seite von (12) zu

$$\Pi((a^{\alpha}, \alpha)(b^{\beta}, \beta)) = \Pi((a^{\alpha})^{\beta} b^{\beta}, \alpha^{b^{\beta}} \beta) = \Pi(a^{\alpha\beta} b^{\beta}, \alpha^b \beta) =$$
$$= ((a^{\alpha\beta} b^{\beta})^{(\alpha^b \beta)^{-1}}, \alpha^b \beta) = ((a^{\alpha\beta} b^{\beta})^{\beta^{-1}(\alpha^b)^{-1}}, \alpha^b \beta) = ((a^{\alpha} b)^{(\alpha^b)^{-1}}, \alpha^b \beta).$$

Nun gilt wegen (5_1), (7_1)

$$a^{\varepsilon} = (a^{(\beta^c)^{-1}})^{\beta^c} = (a^{(\beta^c)^{-1}})^{\beta},$$

also nach (4_1), (5_1)

$$a^{(\beta^c)^{-1}} = a^{\beta^{-1}}.$$

Hiernach ist das vorher berechnete Element gleich

$$((a^{\alpha} b)^{\alpha^{-1}}, \alpha^b \beta).$$

Dies stimmt wegen (4_1), (5_1), (6_1) wirklich mit der rechten Seite von (8) überein, womit der Satz bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] L. Fuchs, Rédeian skew product of operator groups, *diese Acta*, **14** (1952), 228—238.
[2] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal für die reine und angew. Math.*, **192** (1953) (im Erscheinen).
[3] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.
[4] J. Szép, On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *diese Acta*, **12 A** (1950), 57—61.

(Eingegangen am 21. April 1953.)

Die Existenz eines ungeraden quadratischen Nichtrestes mod p im Intervall $1, \sqrt{p}$.

Von L. RÉDEI in Szeged.

Bezeichne p eine ungerade Primzahl und $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$. Eine der schönsten Tatsachen in der Theorie der Verteilung der quadratischen Reste ist der folgende Satz von VINOGRADOV [7][1]):

Unter irgendwelchen $3[\sqrt{p}]-1$ *aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gibt es (mindestens) einen quadratischen Nichtrest* mod p.

Insbesondere folgt aus diesem Satz, daß es für $p>23$ im Intervall $1, 3[\sqrt{p}]$ einen quadratischen Nichtrest mod p gibt. Diesen speziellen Satz haben wir [4] in zwei Richtungen verschärft, indem wir in einem kürzeren (ebenfalls mit 1 beginnenden) Intervall die Dichtigkeit der quadratischen Nichtreste mod p bestimmt haben. Und zwar gilt:

Im Fall $p\equiv 1 \pmod 4$ enthält das Intervall $1, [\sqrt{p}]$ mindestens

$$\frac{[\sqrt{p}]}{4+2\sqrt{2}}\left(>\frac{[\sqrt{p}]}{7}\right)$$

quadratische Nichtreste mod p. Im Fall $p\equiv -1 \pmod 4$ enthält das Intervall $1, \left[2\sqrt{\frac{p}{3}}\right]$ mindestens

$$\frac{\left[2\sqrt{\frac{p}{3}}\right]}{8+4\sqrt{3}}\left(>\frac{\left[2\sqrt{\frac{p}{3}}\right]}{15}\right)$$

quadratische Nichtreste mod p.

Neulich hat NAGELL [1], [2] das Problem des kleinsten positiven ungeraden [2]) quadratischen Nichtrestes mod p untersucht. Nach ihm gilt folgendes:

Ist $p\equiv 1 \pmod 8$ oder $p\equiv 7 \pmod 8$, $p\neq 7, 23$, so gibt es eine ungerade Primzahl $q<\sqrt{p}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$.[3]) Ist $p\equiv 3 \pmod 8$ oder $p\equiv 5$ (mod 8), so gilt ähnliches für $2\sqrt{p}+1$ bzw. $\sqrt{2p}$ statt $\sqrt{p}$.

---

[1]) Mit [ ] wird auf das Literaturverzeichnis am Ende unserer Arbeit hingewiesen.

[2]) Das Wort „ungerade" ist in den Fällen $p\equiv 1, 7 \pmod 8$ überflüßig, in den Fällen $p\equiv 3, 5 \pmod 8$ dagegen wesentlich.

[3]) Der auf $p\equiv 1 \pmod 8$ bezügliche Teil ist eine Folgerung aus unserem obigen Satz.

Wir verschärfen NAGELLs Satz wie folgt:

Satz. *Für jede ungerade Primzahl*

(1) $$p \neq 3, 5, 7, 11, 13, 23, 59, 109, 131$$

gibt es eine ungerade Primzahl $q < \sqrt{p}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$.

Die Fälle $p \equiv 1, 7 \pmod 8$ hat NAGELL mit Hilfe des folgenden Satzes von THUE bewiesen (s. SCHOLZ [6]): [4])

Für jede positive Primzahl p lassen sich alle primen Restklassen mod p durch die Zahlen

$$\pm \frac{x}{y} \qquad (x, y = 1, 2, \ldots < \sqrt{p}; \quad (x, y) = 1)$$

representieren.

Die anderen zwei, weit schwierigeren Fälle $p \equiv 3, 5 \pmod 8$ des Satzes ließen sich dagegen wegen $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ aus THUEs Satz kaum gewinnen.

Vollständigkeitshalber beweisen wir den Satz im ganzen Umfange, wobei wir den auch von NAGELL [2] erledigten Fall $p \equiv 7 \pmod 8$ kürzer und ohne Anwendung des Satzes von Thue beweisen werden.

Vor allem läßt sich leicht nachprüfen, daß die neun Primzahlen auf der rechten Seite von (1) wirkliche Ausnahmefälle sind. Im folgenden werde (1) schon angenommen. Wir bezeichnen mit e die größte ganze Zahl $< \sqrt{p}$, wofür also

(2) $$0 < p - e^2 < 2e$$

gilt. Gleich bemerken wir, daß wegen (1)

(3) $$e \geqq 4$$

ist. Es genügt zu zeigen, daß es unter den ungeraden Zahlen

(4) $$1, 3, 5, \ldots, \quad (\leqq e)$$

einen quadratischen Nichtrest mod p gibt, denn eine solche Zahl hat mindestens einen Primfaktor, der ebenfalls quadratischer Nichtrest mod p ist.

Fall $p \equiv 1 \pmod 8$.

Da jetzt $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ ist, so folgt aus THUEs Satz, daß es unter den Zahlen $\frac{x}{y} y^2 = xy$ $(x, y = 1, 2, \ldots, e)$, also auch unter den

(5) $$1, 2, \ldots, e$$

[4]) Für eine weitgehende Verallgemeinerung des Thueschen Satzes siehe RÉDEI [3]. Anwendungen finden sich bei RÉDEI [4], [5].

einen quadratischen Nichtrest mod p geben muß. Da ferner jetzt $\left(\frac{2}{p}\right)=1$ gilt, so folgt ähnliches für die Zahlen (4), womit der Satz für diesen Fall bewiesen ist.

In den übrigen Fällen beweisen wir den Satz am bequemsten unter der Annahme, daß alle Zahlen (4) quadratische Reste mod p sind. Unser Beweisverfahren wird sein, daß wir trotzdem einen quadratischen Nichtrest mod p angeben, der eine der Zahlen (4) ist.

Fall $p\equiv 7 \pmod 8$.

Mit P, Q bezeichen wir zwei solche Zahlen, die gleich einem Produkt von je zwei Zahlen aus (5) sind. Es genügt die Existenz eines Paars P, Q mit $P+Q=p$ auszuweisen, denn dann muß wegen $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ entweder $\left(\frac{P}{p}\right)=-1$ oder $\left(\frac{Q}{p}\right)=-1$ gelten, woraus wegen $\left(\frac{2}{p}\right)=1$ der gewünschte Widerspruch folgt. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall $2\nmid e$. Wegen (2) ist $P=e^2$, $Q=2\,\frac{p-e^2}{2}$ ein gewünschtes Paar.

Für den übriggebliebenen Fall $2\mid e$ bemerken wir gleich, daß dann gewiß

$$e\geqq 8$$

ist. Im anderen Falle wäre nämlich nach (3) entweder $e=4$, $p=23$, was aber wegen (1) falsch ist, oder $e=6, p=47$, was wegen $\left(\frac{5}{47}\right)=-1$ ebenfalls widersprüchig ist.

Fall $2\mid e$, $8\mid p-(e-1)(e-3)$. Ein geeignetes Paar ist

$$P=(e-1)(e-3),\quad Q=8\frac{p-P}{8},$$

da der letzte Faktor ganz und nach (2)

$$\leqq\frac{1}{8}(6e-3)<e$$

ist.

Fall $2\mid e$, $8\nmid p-(e-1)(e-3)$. Hieraus folgt

$$8\mid p-(e-3)(e-5). \tag{6}$$

Wenn sogar

$$16\mid p-(e-3)(e-5) \tag{7}$$

gilt, so ist

$$P=(e-3)(e-5),\quad Q=16\frac{p-P}{16}$$

ein passendes Paar, da nach (2) der letzte Faktor

$$\leqq \frac{1}{16}(10e-15) < e$$

ist.

Wenn dagegen (7) falsch ist, so gilt wegen (6)

$$16 \mid p-(e-1)(e-7),$$

somit is jetzt

$$P=(e-1)(e-7), \quad Q=16\frac{p-P}{16}$$

ein passendes Paar, da der letzte Faktor $< e$ ist.

Fall $p \equiv 3 \pmod 8$.

Es genügt, wenn wir eine ungerade ganze Zahl N mit $0 < N \leqq e$ angeben, wofür $\left(\frac{N}{p}\right) = -1$ gilt. Hierzu werden wir weitere Fälle unterscheiden müssen. In jedem Fall werden wir N in der Form

$$N=\frac{uv-p}{2^{2k+1}3^l} \text{ oder } N=\frac{p-uv}{2^{2k+3}3^l}$$

mit $k, l = 0, 1$ und

$$u, v = 1, 3, 5, \ldots$$

angeben, wobei wir stets darauf achten, daß die an N gestellten Forderungen erfüllt sind. Insbesondere sichern wir die Erfüllung von $\left(\frac{N}{p}\right) = -1$ wegen $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$ so, daß wir u, v durch $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{v}{p}\right)$ einschränken. Hierzu genügt es, wenn wir auch noch für

$$u = v \text{ oder } u, v \leqq e \text{ oder } u \leqq e, v \leqq 3e, 3 \mid v$$

sorgen, denn dann wird in den zwei letzteren Fällen wegen der Annahme über (4) sogar $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{v}{p}\right) = 1$.

Fall $2 \mid e$. Offenbar ist

$$N=\frac{(e+1)^2-p}{2}$$

eine passende Zahl.

Fall $4 \mid e-1$. Jetzt ist

$$N=\frac{p-e(e-2)}{4}$$

eine passende Zahl.

Es ist nur noch der Fall $4 \mid e+1$ übrig.

Fall $4 \mid e+1$, $3 \mid e$. Vorläufig nehmen wir

$$e > 18 \tag{8}$$

an. Wir betrachten die zwei ganzen Zahlen

$$a = \frac{e(e+6)-p}{8}, \quad b = \frac{(e-6)(e+12)-p}{8}.$$

Es gilt

$$a = b + 9,$$

weshalb das eine von a, b ungerade ist. Beide liegen zwischen 0 und e, denn aus (2), (8) folgt

$$b > \frac{1}{8}(4e-72) > 0, \quad a < \frac{6e}{8} < e.$$

Folglich ist jetzt a oder b eine passende Zahl N.

Wenn nun (8) nicht gilt, so kommt wegen (3) nur $e = 15$, d. h. $p = 227, 251$ in Betracht. Auch diese Fälle scheiden aus, da $\left(\frac{5}{227}\right) = -1$, $\left(\frac{11}{251}\right) = -1$ ist.

Fall $4 \mid e+1$, $3 \mid e-1$. Vorläufig nehmen wir

$$e > 40 \tag{9}$$

an. Wir betrachten die vier Zahlen

$$a = \frac{p-(e-4)(e+2)}{16}, \quad b = \frac{p-(e-12)(e+2)}{16},$$

$$c = \frac{p-(e-22)(e+20)}{16}, \quad d = \frac{p-(e-16)(e+14)}{16}.$$

Der Zähler von a ist durch 8 teilbar. Ferner gilt

$$b = a + \frac{e+1}{2} + \frac{1}{2}, \quad c = a + 27, \quad d = a + 13 + \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt $\left(\text{wegen } 2 \,\middle|\, \frac{e+1}{2}\right)$, daß eine der Zahlen a, b, c, d eine ungerade ganze Zahl ist. Diese ist eine passende Zahl N, insofern sie zwischen 0 und e liegt. Die kleinste der Zahlen a, b, c, d ist a, die größte ist b oder c. Nun gilt nach (2), (9) in der Tat

$$a > \frac{1}{16}(2e+8) > 0,$$

$$b < \frac{1}{16}(12e+24) < e,$$

$$c < \frac{1}{16}(4e+440) < e.$$

Wenn (9) nicht gilt, so kommen nur $e = 7, 19, 31$, d. h. $p = 59, 379, 971, 1019$ in Betracht. Hiervon ist $p = 59$ wegen (1) unmöglich. Auch die übrigen Fälle scheiden wegen

$$\left(\frac{3}{379}\right)=\left(\frac{11}{971}\right)=\left(\frac{7}{1019}\right)=-1$$

aus.

Fall $4 \mid e+1,\ 3 \mid e+1$. Vorläufig nehmen wir

(10) $$e > 30$$

an. Wir betrachten die vier Zahlen

$$a=\frac{p-(e-30)(e-4)}{48},\quad b=\frac{p-(e-22)(e-10)}{48},$$
$$c=\frac{p-(e-18)(e-16)}{48},\quad d=\frac{p-(e-12)(e-22)}{48}.$$

Der Zähler von a ist (wegen $p\equiv 2 \pmod 3$) durch 24 teilbar. Ferner gilt

$$b=a-3+\frac{1}{2},\ c=a-4+\frac{1}{2},\ d=a-3.$$

Hieraus folgt, daß eine der Zahlen a, b, c, d eine ungerade ganze Zahl ist. Diese ist dann eine passende Zahl N, insofern sie zwischen 0 und e liegt. Das ist wegen (10) und (2) in der Tat der Fall, da nach (2)

$$a<\frac{1}{48}(36e-120)<e$$

gilt.

Wenn endlich (10) falsch ist, so kommen nur $e=11, 23$, d. h. $p=131$, 139, 547, 563, 571 in Betracht. Hiervon ist $p=131$ wegen (1) unmöglich. Auch die übrigen Fälle scheiden wegen

$$\left(\frac{3}{139}\right)=\left(\frac{3}{547}\right)=\left(\frac{5}{563}\right)=\left(\frac{3}{571}\right)=-1$$

aus.

Fall $p\equiv 5 \pmod 8$.

In diesem Fall genügt wegen $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ eine ungerade ganze Zahl N mit $-e\leqq N\leqq e$ und $\left(\frac{N}{p}\right)=-1$ anzugeben. Sonst wird dieser Fall dem vorigen ähnlich, mit der Vereinfachung, daß wir jetzt ein N in der Form

$$N=\frac{p-uv}{2^{2k+1}}$$

angeben werden können, wobei k, u, v dasselbe bedeuten wie vorher.

Fall $2 \nmid e,\ 3 \mid e$. Zunächst sei

(11) $$e > 10.$$

Jetzt ist

$$N=\frac{p-(e-4)(e+6)}{2}$$

eine passende Zahl, insofern $-e \leqq N \leqq e$ gilt. Aus (2) folgt in der Tat

$$N > \frac{1}{2}(-2e+24) > -e,$$

$$N < 12, N \leqq 11 \leqq e.$$

Gilt (11) nicht, so kommt wegen (3) nur $e=9$ in Betracht, dieser Fall fällt aber aus, da zwischen 81 und 100 kein $p \equiv 5 \pmod{24}$ liegt.

Fall $2 \nmid e$, $3 \mid e-1$. Eine passende Zahl ist

$$N=\frac{p-e(e+2)}{2}.$$

Fall $2 \nmid e$, $3 \mid e+1$. Jetzt paßt

$$N=\frac{p-(e-2)(e+4)}{2},$$

da nach (2), (3)

$$N > \frac{1}{2}(-2e+8) > -e,$$

$$N < 4 \leqq e$$

gilt.

Fall $2 \mid e$, $3 \mid e$. Eine gewünschte Zahl ist

$$N=\frac{p-(e-3)(e+3)}{2},$$

wenn auch $-e \leqq N \leqq e$ gilt. Hiervon ist $N \geqq -e$ trivial. Wenn $N \leqq e$ falsch ist, so gilt $N \geqq e+1$, also

$$p \geqq e^2+2e-7.$$

Wegen (2) und $p \equiv 5 \pmod 8$ müßte $p=e^2+2e-3$ sein, aber die rechte Seite läßt sich in $(e-1)(e+3)$ zerlegen, kann also keine Primzahl sein.

Fall $2 \mid e$, $3 \mid e+1$. Jetzt paßt

$$N=\frac{p-(e-1)(e+1)}{2}$$

offenbar.

Fall $2 \mid e$, $3 \mid e-1$. Vorläufig sei

(13) $$e > 15.$$

Wir betrachten

$$a=\frac{p-(e-7)(e+5)}{8}, \quad b=\frac{p-(e-11)(e+17)}{8}.$$

Beide sind ganz und wegen

$$b = a - e + 19$$

ist das eine von ihnen ungerade, also ein passendes N, vorausgesetzt, daß sie zwischen $-e$ und e liegen. Das trifft zu, da nach (2), (13)

$$a > 0, \ b > -e.$$

$$a < \frac{1}{8}(4e + 35) < e, \quad b < \frac{1}{8}(-4e + 187) < e$$

ist.

Ist (12) falsch, so kommen nur $e = 4, 10$, also $p = 101, 109$ in Betracht. Wegen (1) ist $p = 109$ unmöglich, auch $p = 101$ scheidet wegen $\left(\frac{3}{101}\right) = -1$ aus. Den Satz haben wir bewiesen.

Anmerkung bei der Korrektur (10. Juni 1953). Vgl. noch die folgenden zwei Arbeiten, in denen ein Teil obigen Satzes, teils in schärferer Form, mit anderer Methode bewiesen wird: T. NAGELL, Sur le plus petit non-reste quadratique impair, *Arkiv för Mat.*, **1** (1951), Nr 38; A. BRAUER, Über den kleinsten quadratischen Nichtrest, *Math. Zeitschrift*, **33** (1931), 161—176.

Literaturverzeichnis

[1] T. NAGELL, Sur les restes et les non-restes quadratiques suivant un module premier, *Arkiv för Mat.*, **1** (1950), Nr 16.

[2] T. NAGELL, Sur un théorème d'Axel Thue, *Arkiv för Mat.*, **1** (1951), Nr 33.

[3] L. RÉDEI, Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes, *Acta Math.*, **84** (1950), 155—158.

[4] L. RÉDEI, Über die Anzahl der Potenzreste mod p im Intervall 1, $\sqrt{p}$, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **23** (1950), 150—162.

[5] L. RÉDEI, Über eine Verschärfung eines zahlentheoretischen Satzes von Thue, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 75—82.

[6] SCHOLZ, *Einführung in die Zahlentheorie* (Berlin, 1939), insb. S. 45—46.

[7] У. М. Виноградов, Основы теории чисель (I. M. VINOGRADOV, *Die Grundlagen der Zahlentheorie*), 5. Auflage (Moskau—Leningrad, 1949), insb. S. 87, Beispiel 8.

(Eingegangen am 21. April 1953.)

Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen.

Von G. SZÁSZ in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Es sei S eine gegebene Menge mit ν Elementen; ν ist endlich oder unendlich. Ist in S eine (eindeutige) Multiplikation definiert, so sagen wir, daß die Menge S hinsichtlich der gegebenen Multiplikation eine *multiplikative Struktur* $S^\times$ bildet. Wir wollen bemerken, daß wir die Multiplikation in $S^\times$ im allgemeinen keinen einschränkenden Bedingungen unterwerfen.

Natürlich lassen sich aus einer gegebenen Menge S verschiedene Strukturen $S^\times$ bilden. Man nennt eine Struktur $S^\times$ eine *assoziative multiplikative Struktur* (anders gesagt, eine *Halbgruppe*), wenn alle Gleichungen von der Form

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in S) \tag{1}$$

erfüllt sind. Die Gleichungen (1) werden *Assoziativitätsbedingungen* genannt.

Prof. L. RÉDEI hat während der Abfassung seines noch nicht erschienenen Lehrbuches über höhere Algebra das folgende Problem von prinzipieller Bedeutung aufgeworfen: Gibt es für eine gegebene Menge S von ν Elementen ein echtes Teilsystem der Gleichungen (1), so daß das Bestehen der Gleichungen dieses Teilsystems schon die Erfüllung der übrigen Gleichungen (1) nach sich zieht (nämlich bezüglich aller aus S gebildeten Strukturen $S^\times$). Es ist mir gelungen das Problem vollständig zu lösen, und zwar mit dem überraschenden Ergebnis, daß im Falle $\nu \geqq 4$ keine der Gleichungen (1) aus den übrigen folgt. Genauer gesagt: *Wie man auch im Falle einer Menge S mit wenigstens vier Elementen eine der Gleichungen* (1) *auszeichnet, kann man S zu einer multiplikativen Struktur $S^\times$ machen, so daß in $S^\times$ die ausgezeichnete Gleichung nicht erfüllt ist, die anderen Gleichungen aber erfüllt sind.* Kurz gesagt, im Falle $\nu \geqq 4$ bilden die Assoziativitätsbedingungen ein unabhängiges Axiomensystem.

Der Beweis stützt sich wesentlich auf den Fall $\nu = 3$. Teils aus diesem Grunde, teils der Vollständigkeit halber habe ich auch die Fälle $\nu \leqq 3$ untersucht. Es stellt sich heraus, daß die Assoziativitätsbedingungen im Falle $\nu \leqq 3$

nicht unabhängig sind; es ist mir auch gelungen in diesen Fällen ein unabhängiges vollständiges[1]) Teilsystem der Axiomen (1) anzugeben[2]).

Diese Arbeit gliedert sich, wie folgt: § 2. Vorbereitungen. § 3. Fall $\nu = 3$ (erster Teil). § 4. Fall $\nu \geqq 4$. § 5. Fall $\nu = 3$ (zweiter Teil). § 6. Fall $\nu = 2$.[3])

§ 2. Vorbereitungen.

Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir mit den Buchstaben a, b, c, d verschiedene Elemente der Menge S bezeichnen. Dagegen werden die Buchstaben x, y, z, t zur Bezeichnung beliebiger (d. h. nicht unbedingt verschiedener) Elemente aus S dienen, wie schon oben in (1).

Zum Zweck des leichteren Ausdrucks vereinbaren wir uns in der folgenden Redeweise.

Ein Tripel (x, y, z) der Elemente von S wird *in* $S^\times$ *assoziativ* genannt, wenn $(xy)z = x(yz)$; ist dagegen $(xy)z \neq x(yz)$, dann wird das Tripel (x, y, z) *nichtassoziativ* genannt.

Wir sagen, daß ein Tripel (x, y, z) der Elemente der Menge S *isoliert* ist, wenn es eine multiplikative Struktur $S^\times$ gibt, in der allein das Tripel (x, y, z) nichtassoziativ ist. Unser Hauptresultat kann also auch folgendermaßen formuliert werden: Im Falle $\nu \geqq 4$ sind alle Tripel isoliert.

Zwei Tripel (x, y, z), (x', y', z') heißen *von gleichem Typ*, wenn sie auseinander durch eine Permutation der Elemente von S entstehen. Es gibt also die folgenden fünf Typen:

$$(a, a, a),\quad (a, a, b),\quad (b, a, a),\quad (a, b, a)\quad (a, b, c), \tag{2}$$

wobei wir jedesmal einen Repräsentanten des Typs angegeben haben. (Der letzte der fünf Typen kommt nur im Falle $\nu \geqq 3$ vor.)

Es seien (x, y, z) und (x', y', z') zwei Tripel von S von gleichem Typ, und nehmen wir an, daß (x, y, z) isoliert ist. Dann können wir durch einfache Umbezeichnung der Elemente[4]) sofort einsehen, daß (x', y', z') auch

[1]) Wie üblich nennen wir ein Teilsystem eines Axiomensystems *vollständig*, wenn es mit dem ursprünglichen Axiomensystem äquivalent ist.

[2]) Im Fall $\nu = 3$ ist dies nur auf eine Art möglich, im Fall $\nu = 2$ aber auch auf verschiedene Arten. Im Fall $\nu = 1$ gibt es nur eine einzige Struktur $S^\times$, die trivialerweise assoziativ ist. (D. h., in diesem Fall ist das „leere Teilsystem" von (1) vollständig, wenn es auch etwas komisch lautet.) Dementsprechend werden wir uns auf die Fälle $\nu \geqq 2$ beschränken dürfen.

[3]) Diese Arbeit wurde am 6-ten April 1953 der math.-phys. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt, und wird in den *Sitzungsberichten* dieser Klasse *(Osztályközlemények)* in ungarischer Sprache unter dem Titel „Az asszociativitásfeltételek függetlensége" erscheinen.

[4]) Bezüglich einer genauen Ausführung dieses übrigens wohlbekannten Prinzips siehe L. Rédei: Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **188** (1950), 201–227, insbesondere § 2.

isoliert ist. Man darf also mit Recht nicht nur über isolierte Tripel, sondern auch über *isolierte Typen* reden: man nennt einen Typ isoliert, wenn die in ihm enthaltenen Tripel isoliert sind. Hiernach wird nicht nötig alle Tripel nach der Isoliertheit hin zu untersuchen, sondern es wird genug je einen Repräsentanten aller fünf Typen zu betrachten.

Um die folgenden Betrachtungen leichter zu machen, schicken wir noch einige einfache Hilfssätze voraus, deren trivialer Beweis sich ersparen läßt.

Hilfssatz 1. *Die mit den Cayleyschen Tafeln angegebenen zwei Strukturen*

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array}$$

sind assoziativ.

Wir nennen, wie üblich, ein Element x einer multiplikativen Struktur $S^\times$ ein *linksseitiges Zeroelement,* wenn $xy = x$ für jedes y in S gilt; entsprechend ist ein *rechtsseitiges Zeroelement* zu verstehen. Ist ein Element gleichzeitig linksseitiges und rechtsseitiges Zeroelement, so nennen wir es einfach ein *Zeroelement.*

Hilfssatz 2. *Ist entweder x ein linksseitiges oder z ein rechtsseitiges Zeroelement, so sind alle Tripel (x, y, z) associativ.*

Hilfssatz 3. *Alle Tripel mit mindestens einem Zeroelement sind assoziativ.*

Hilfssatz 4. *Es sei $S^\times$ eine Unterstruktur der multiplikativen Struktur $T^\times$. Wenn für ein Element z der Menge $T—S$*[5]) *die Gleichungen*

$$xt = tx = z \qquad (x \in T,\ t \in T—S)$$

gelten, so stimmen die nichtassociativen Tripel von $T^\times$ mit den nichtassoziativen Tripel von $S^\times$ überein[6]). (Mit anderen Worten: sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 erfüllt, so sind alle Tripel assoziativ, die mindenstens ein Element von $T—S$ enthalten.)

Wir wollen bemerken, daß das Element z im Hilfssatz 4 ein Zeroelement ist. Andererseits ist leicht zu sehen, daß Hilfssatz 3 ein Spezialfall von Hilfssatz 4 ist, wo $T—S$ allein aus dem Zeroelement von $T^\times$ besteht.

Ein Element x von $S^\times$ nennen wir ein *linksseitiges Einselement,* wenn $xy = y$ für jedes y in S gilt.

Hilfssatz 5. *Ist x ein linksseitiges Einselement, so ist das Tripel (x, y, z) assoziativ.*

Hilfssatz 6. *Ist ein Element x idempotent, so ist das Tripel (x, x, x) assoziativ.*

[5]) $T—S$ bedeutet die Menge aller Elemente von T, die in S nicht enthalten sind.

[6]) Man darf $T^\times$ auch eine *triviale Erweiterung* von $S^\times$ nennen, denn bei dem Übergehen von $S^\times$ zu $T^\times$ ist der Wert aller „neuen" Produkte gleich z.

§ 3. Fall $\nu = 3$ (erster Teil).

Hier werden wir uns mit den Strukturen $S^\times$ beschäftigen, die sich aus der Menge[7]) $S = \{a, b, c\}$ mit drei Elementen bilden lassen.

Lemma 1. *Die Tripel der Menge $S = \{a, b, c\}$, die nicht vom Typ (a, a, a) sind, sind isoliert.*

Den Beweis führen wir so, daß wir je eine Struktur $S^\times$ angeben, in welcher der Reihe nach allein das Tripel (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) bzw. (a, b, c) nichtassoziativ ist, die übrigen Tripel aber assoziativ sind. (Mit dem Typ (a, a, a) werden wir uns im § 5 beschäftigen; dort werden wir sehen, daß dieser Typ — für Mengen mit drei Elementen — nicht isoliert ist.)

1°. Um die Isoliertheit des Tripels (a, a, b) zu zeigen, betrachten wir die mit der Cayleyschen Tafel angegebene Struktur[8])

$$\begin{array}{c|ccc} \circ & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \tag{3}$$

Man sieht sofort, daß ein Produkt in (3) nur dann $\neq c$ sein kann, wenn sein erster Faktor a ist. Andererseits ist $xy \neq a$, woraus stets $(xy)z = c$ folgt.

Dagegen ist dann und nur dann $x(yz) \neq c$, wenn $x = a$ und $yz = b$, d. h. wenn $x = a$, $y = a$ und $z = b$ ist.

Damit haben wir gezeigt, daß in der Struktur (3) (a, a, b) nichtassoziativ ist, alle anderen Tripel aber assoziativ sind. Das Tripel (a, a, b) ist also isoliert.

2°. Durch Spiegelung der vorigen Cayleyschen Tafel an der Diagonale erhält man die Struktur

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \tag{4}$$

in der (b, a, a) das einzige nichtassoziative Tripel ist. Um dies zu zeigen, kann man ähnlich wie in 1° verfahren, nur muß man die Rolle der Zeilen

---

7) Das Zeichen $\{\ldots\}$ verstehen wir im üblichen mengentheoretischen Sinne.

8) Dieses Beispiel haben wir aus der Arbeit von AL. C. CLIMESCU, Etudes sur la théorie des systèmes multiplicatifs uniformes I., L'indice de non-associativité, *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy,* **2** (1947), 97—121, übernommen, wir geben aber einen vollständigen Beweis an. CLIMESCU betrachtet in seiner Arbeit ebenfalls das Problem der Assoziativitätsbedingungen, aber von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus als wir. Er nennt nämlich die Anzahl der nicht erfüllten Gleichungen (1) einer Struktur $S^\times$ mit ν Elementen (ν endlich) den *Index* (der Nichtassoziativität) dieser Struktur. Der Index ist also gewiß eine der Zahlen $0, 1, \ldots, \nu^3$. CLIMESCU hat die sehr interessante Tatsache nachgewiesen, daß es im Fall $\nu \geq 3$ zu jedem Wert von i mit $0 \leq i \leq \nu^3$ eine Struktur mit ν Elementen gibt, deren Index i ist.

und Spalten von (3) überall vertauschen. Also ist auch der Typ (b, a, a) isoliert.

3°. Wir betrachten nun die mit der Cayleyschen Tafel

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & a & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \tag{5}$$

angegebene Struktur $S^{\times}$. In dieser ist daß Tripel (a, b, a) nichtassoziativ, denn es gilt

$$(ab)a = ca = c, \qquad a(ba) = aa = a.$$

Die übrigen Tripel sind aber assoziativ, wie das die folgenden Ausführungen zeigen.

Da c in (5) ein Zeroelement ist, so ist jedes Tripel, das das Element c enthält, nach Hilfssatz 3 assoziativ. Es genügt also noch diejenigen Tripel zu untersuchen, in welchen das Element c nicht vorkommt.

Da ferner b ein linksseitiges Einselement ist, so ist jedes Tripel mit dem ersten Element b nach Hilfssatz 5 assoziativ.

Es sind also nur noch diejenigen Tripel von der Form (a, y, z) zu untersuchen, in denen y und z beide aus den Elementen a und b sind. Insbesondere haben wir aber die Nichtassoziativität von (a, b, a) schon oben festgestellt, ferner ist (a, a, a) nach Hilfssatz 6 assoziativ. Endlich gelten für die übrigen zwei Tripel der genannten Art

$$(aa)b = ab = c, \qquad a(ab) = ac = c;$$
$$(ab)b = cb = c, \qquad a(bb) = ab = c;$$

so daß auch (a, a, b) und (a, b, b) assoziativ sind.

Wir haben somit bewiesen, daß der Typ (a, b, a) isoliert ist.

4°. Endlich sei

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array} \tag{6}$$

die Cayleysche Tafel einer multiplikativen Struktur. Es ist dann zunächst

$$(ab)c = ac = c, \qquad a(bc) = ab = a,$$

wonach (a, b, c) nichtassoziativ ist. Wir zeigen, daß die übrigen Tripel assoziativ sind.

Da b und c linksseitige Zeroelemente sind, so sind nach Hilfssatz 2 alle (b, y, z) und (c, y, z) assoziativ. Man braucht also weiterhin nur die Tripel mit dem Anfangselement a zu betrachten.

Man sieht aus (6), daß die Elemente a, b bzw. a, c je eine Unterstruktur der mit (6) gegebenen Struktur bilden. Diese Unterstrukturen sind nach

Hilfssatz 1 beide assoziativ. Deshalb sind auch diejenigen mit a beginnenden Tripel assoziativ, die außer a nur eines von den Elementen b, c enthalten.

Man hat also noch die Tripel mit dem Anfangselement a zu untersuchen, in welchen b und c gleichzeitig vorkommen. Es gibt zwei Tripel von dieser Art, nämlich (a, b, c) und (a, c, b). Das erste von diesen ist aber das oben schon betrachtete nichtassoziative Tripel, das also nicht hierher gehört. Für das zweite gelten

$$(ac)b = cb = c, \qquad a(cb) = ac = c.$$

Hiermit haben wir die Isoliertheit des Typs (a, b, c) gezeigt, womit Lemma 1 völlig bewiesen ist.

§ 4. Fall $\nu \geqq 4$.

Auf Grund der oben für den Fall $\nu = 3$ gewonnenen Resultate beweisen wir hier unseren Hauptsatz.

Satz 1. *Vorausgesetzt, daß die Menge S mindestens vier Elemente hat, bilden die Gleichungen* (1) *ein unabhängiges Axiomensystem.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß im Fall $\nu \geqq 4$ alle Tripel isoliert sind. Zu diesem Zwecke bemerken wir folgendes. Betrachten wir zwei Mengen $S = \{a, b, c\}$, $T = \{a, b, c, d, \ldots\}$ wobei also T eine Erweiterungsmenge von S mit mindestens vier Elementen ist, und bilden aus ihnen je eine multiplikative Struktur $S^\times$, $T^\times$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

1. $T^\times$ ist eine Erweiterungsstruktur von $S^\times$;
2. für alle $t \in T - S$, $x \in T$ gilt $xt = tx = d$.

Nach Hilfssatz 4 stimmen die nichtassoziativen Tripel von $T^\times$ mit den von $S^\times$ überein. Wendet man diese Bemerkung mit den durch die Cayleyschen Tafeln (3)—(6) definierten vier Strukturen $S^\times$ an, so erhält man je eine Struktur $T^\times$ mit $\nu \geqq 4$ Elementen mit den einzigen nichtassoziativen Tripel (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) bzw. (a, b, c).

Es bleibt noch der Typ (a, a, a) zu untersuchen übrig. Um die Isoliertheit von (a, a, a) für $\nu \geqq 4$ zu zeigen, betrachten wir die aus der Menge $S = \{a, b, c, d, \ldots\}$ gebildete Struktur $S^\times$, in der die Multiplikation folgenderweise definiert ist:

(7.1) $\quad aa = b$;

(7.2) $\quad ab = c$;

(7.3) $\quad xy = d$ für alle übrigen Elementenpaare x, y.

Vor allem gilt in dieser Struktur

$$(aa)a = ba = d, \qquad a(aa) = ab = c,$$

also ist (a, a, a) ein nichtassoziatives Tripel. Wir zeigen die Assoziativität der übrigen Tripel.

Da im Fall $x \neq a$ unbeschränkt $xt = d$ gilt, so ist für jedes Tripel (x, y, z) mit $x \neq a$

$$(xy)z = dz = d, \qquad x(yz) = d.$$

Man braucht also nur noch die Tripel von der Form (a, y, z) zu untersuchen.

Ist y eins von den Elementen $c, d, \dots$, so gilt

$$(ay)z = dz = d, \qquad a(yz) = ad = d.$$

Ist andererseits z eins von den Elementen $c, d, \dots$, so gilt (wegen $tc = td = \dots = d$ für beliebige t in S)

$$(ay)z = d, \qquad a(yz) = ad = d.$$

Mithin sind nur noch die drei Tripel von der Form (a, y, z) übrig geblieben, in welchen y und z gleich a oder b, aber nicht beide gleich a sind. Für diese gilt

$$\begin{aligned} (aa)b &= bb = d, & a(ab) &= ac = d; \\ (ab)a &= ca = d, & a(ba) &= ad = d; \\ (ab)b &= cb = d, & a(bb) &= ad = d. \end{aligned}$$

Wir haben für $\nu \geqq 4$ auch die Isoliertheit des Typs (a, a, a) ausgewiesen, womit der Beweis von Satz 1 beendigt ist.

§ 5. Fall $\nu = 3$ (zweiter Teil).

Im Fall $\nu = 3$ macht der Typ (a, a, a) die meisten Schwierigkeiten (der sich jetzt ganz anders verhält als im eben erledigten Fall $\nu \geqq 4$ und auch als die übrigen Typen im Fall $\nu = 3$). Hierauf bezieht sich

Lemma 2. *Sind in einer aus der Menge $S = \{a, b, c\}$ gebildeten multiplikativen Struktur alle Tripel von der Form*

$$\text{(8)} \qquad \left.\begin{matrix} (a, a, x), & (x, a, a) \\ (a, x, a), & (x, a, x) \end{matrix}\right\} \; x = b \quad \textit{oder} \quad x = c$$

assoziativ, dann ist auch (a, a, a) assoziativ.

Vor dem Beweise dieses Lemmas zeigen wir, daß aus ihm und aus Lemma 1 im § 3 der folgende Satz entsteht:

Satz 2. *Für eine Menge $S = \{a, b, c\}$ mit drei Elementen enthält das System der Assoziativitätsbedingungen ein einziges unabhängiges vollständiges Teilsystem. Dieses entsteht so, daß man aus (1) die Gleichungen mit $x = y = z$ streicht.*

Nach Lemma 1 sind nämlich die von (a, a, a) verschiedenen Typen isoliert. Deshalb bilden diejenigen 24 Gleichungen in (1), für welche $x = y = z$ nicht besteht, ein unabhängiges Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen (1). Andererseits besagt das Lemma 2, daß die gesagten 24 Gleichungen ein vollständiges System der Assoziativitätsbedingungen (1) bilden.

B e w e i s v o n L e m m a 2. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind und trotzdem (a, a, a) nichtassoziativ ist. Wegen letzteres besteht einer der folgenden drei Fälle:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & (aa)a = a, & a(aa) = x & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ (x = b, c)$} \\ \text{(II)} & (aa)a = x, & a(aa) = a & \\ \text{(III)} & (aa)a = x, & a(aa) = y & (x = b,\ y = c \quad \text{oder} \quad x = c,\ y = b). \end{array}$$

Wir betrachten diese Fälle einzeln, schicken wir aber für alle drei Fälle voraus, daß nach Hilfssatz 6 $aa \neq a$ sein muß.

F a l l I. Bezeichne z das von a und x verschiedene (dritte) Element von S. Wir machen eine weitere Fallunterscheidung je nachdem $aa = x$ oder $aa = z$ ist.

Wenn $aa = x$ ist, dann gelten nach den Bedingungsgleichungen (I)

$$xa = a, \qquad ax = x.$$

Hieraus folgt

$$a(xa) = aa = x, \qquad (ax)a = xa = a;$$

wonach das Tripel (a, x, a) nichtassoziativ ist, gegen unsere Voraussetzung.

Wenn $aa = z$ ist, dann gilt nach (I)

$$za = a, \qquad az = x. \tag{9}$$

Aus (9) werden wir wieder auf die Nichtassoziativität von (a, x, a) schließen. Wegen (9) und der Voraussetzungen von Lemma 2 gilt nämlich

$$ax = a(az) = (aa)z = zz = z(aa) = (za)a = aa = z,$$
$$xa = (az)a = a(za) = aa = z.$$

Hiernach ist

$$(ax)a = za = a, \qquad a(xa) = az = x,$$

gegen die Voraussetzung.

F a l l II. Dieser Fall entsteht aus Fall I einfach durch „Dualisieren", so nämlich, daß man überall zur umgekehrten Multiplikation übergeht.

F a l l III. Wieder sind zwei Unterfälle möglich, je nachdem $aa = x$ oder $aa = y$ ist.

Wenn

$$aa = x \tag{10}$$

ist, so gilt nach (III)

$$xa = x, \qquad ax = y. \tag{11}$$

Ein Widerspruch ergibt sich so, daß wir die Nichtassoziativität von (a, a, y) zeigen. Zu diesem Zweck rechnen wir einige Produkte aus. Nach (10), (8) und (11) gilt

$$xx = x(aa) = (xa)a = xa = x. \tag{12}$$

Nach (11), (8) und (12) gilt

$$xy = x(ax) = (xa)x = xx = x. \tag{13}$$

Nach (11), (8), (10) und (12) gilt

$$ay = a(ax) = (aa)x = xx = x. \tag{14}$$

Nun folgt aus (10), (13), bzw. (14), (11)

$$(aa)y = xy = x, \quad a(ay) = ax = y,$$

womit wir auf den gewünschten Widerspruch gestoßen sind.

Wenn $aa = y$, so läßt sich dieser Fall auf den eben erledigten wieder einfach durch Dualisieren zurückführen, was man so erkennt, daß der vorige Fall der Annahme $(aa)a = aa$, während der jetzige der (dualen) Annahme $a(aa) = aa$ gleich kommt.

Damit ist Lemma 2, also auch Satz 2 bewiesen.

§ 6. Fall $\nu = 2$.

Endlich untersuchen wir den Fall $\nu = 2$. Wir teilen die aus den Elementen der Menge $S = \{a, b\}$ gebildeten acht verschiedenen Tripel in drei Klassen ein:

$\mathfrak{C}_1$: (a, a, a), (a, b, a);

$\mathfrak{C}_2$: (b, b, b), (b, a, b);

$\mathfrak{C}_3$: (a, a, b), (a, b, b), (b, a, a), (b, b, a);

und beweisen den folgenden

Satz 3. *Ist in einer aus der Menge $S = \{a, b\}$ gebildeten multiplikativen Struktur $S^\times$ je ein Tripel aus den Klassen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ assoziativ, so ist $S^\times$ eine Halbgruppe.* (Mit anderen Worten: im Fall $\nu = 2$ bildet jede solche Teilmenge der Assoziativitätsbedingungen ein unabhängiges vollständiges Teilsystem, die die Assoziativität je eines Tripels der Klassen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ vorschreibt.)

Beweis. Der Leser kann sich durch unmittelbares Ausrechnen leicht überzeugen, daß 8 unter den 16 verschiedenen multiplikativen Strukturen $S^\times$, die sich aus der Menge $S = \{a, b\}$ bilden lassen, assoziativ sind, und im Fall der übrigen 8 Strukturen die nichtassoziativen Tripel entweder alle Tripel einer der Klassen $\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, oder die sämtlichen verschiedenen Tripel sind. Deshalb sind für jedes $S^\times$ und für jedes $\mathfrak{C}_i$ entweder alle Tripel von $\mathfrak{C}_i$ assoziativ, oder alle nichtassoziativ. Das bedeutet eben die Richtigkeit von Satz 3.

(Eingegangen am 2. April 1953.)

Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens.

Par J. DIXMIER à Dijon (France).

Soit H un espace préhilbertien réel ou complexe (c'est-à-dire un espace vectoriel réel ou complexe muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne positive $\langle x, y \rangle$ telle que $\langle x, x \rangle = 0$ entraîne $x = 0$). Le complété de H est un espace hilbertien dont la dimension (au sens hilbertien) sera appelée la dimension hilbertienne de H et notée $\dim H$.

On appelle base orthonormale dans H un système orthonormal (x_α) tel que les combinaisons linéaires des x_α soient partout denses dans H. On sait qu'*il existe* des bases orthonormales lorsque l'une des conditions suivantes est remplie:

1) H est complet (on considère un système orthonormal maximal);

2) $\dim H \leqq \aleph_0$ (on utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt).

Nous allons établir les résultats suivants ($\mathfrak{c}$ désigne la puissance du continu):

(a) *Pour tout cardinal* $\mathfrak{m} > \aleph_0$, *il existe un espace préhilbertien* H *tel que* $\dim H = \mathfrak{m}$ *et ne possédant aucune base orthonormale.*

(b) *Il existe un espace préhilbertien* H *tel que* $\dim H = \mathfrak{c}$ *et dans lequel tout système orthonormal est dénombrable.*

(c) *Dans un espace préhilbertien* H *tel que* $\dim H > \mathfrak{c}$, *tout système orthonormal maximal a une puissance* $> \mathfrak{c}$.

Soient K_1, K_2, K_3 trois espaces hilbertiens, avec $\dim K_1 = \mathfrak{p}_1$, $\aleph_1 \leqq \dim K_2 = \mathfrak{p}_2 \leqq \mathfrak{c}$, $\dim K_3 = \aleph_0$. On sait que la dimension *algébrique* de K_3 est $\mathfrak{c}$. Soit donc $(g_\beta)_{\beta \in B}$ un système algébriquement libre de vecteurs de K_3, l'ensemble d'indices B ayant pour puissance $\mathfrak{p}_2$. Soit $(f_\beta)_{\beta \in B}$ une base orthonormale de K_2. Enfin, soit $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base orthonormale de K_3, A étant dénombrable. Formons l'espace hilbertien $K = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$, et identifions K_1, K_2, K_3 à des sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de K. Posons $h_\beta = f_\beta + g_\beta$ pour $\beta \in B$. Soit H le sous-espace vectoriel de K engendré *algébriquement* par K_1 et les h_β.

Considérons un système orthonormal $(k_\iota)_{\iota \in I}$ dont les éléments appartiennent à H. Pour $\alpha \in A$, e_α est orthogonal à tous les k_ι sauf à une infinité dénombrable d'entre eux. Comme A est dénombrable, K_3 est orthogonal à tous les k_ι sauf à une infinité dénombrable d'entre eux. On peut donc écrire $I = I_1 \cup I_2$, I_1 et I_2 étant disjoints, I_2 étant dénombrable, et K_3 étant orthogonal à k_ι pour $\iota \in I_1$.

Soit $\iota \in I_1$. On a $k_\iota = x + c_1 h_{\beta_1} + c_2 h_{\beta_2} + \cdots + c_n h_{\beta_n} = x + \sum_{i=1}^{n} c_i f_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n} c_i g_{\beta_i}$, avec $x \in K_1$. Comme k_ι est orthogonal à K_3, on a $\sum_{i=1}^{n} c_i g_{\beta_i} = 0$, donc $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ puisque le système (g_β) est libre. Ainsi, $k_\iota = x \in K_1$.

Ceci établi, supposons d'abord $K_1 = 0$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{c}$. Alors I_1 est vide, de sorte que tout système orthonormal de H est dénombrable. D'autre part, la projection orthogonale de H sur K_2 contient les f_β, donc est partout dense dans K_2, de sorte que $\mathfrak{c} = \dim K_2 \leqq \dim H \leqq \dim K = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$. Ainsi, $\dim H = \mathfrak{c}$, et l'assertion (b) est démontrée.

Supposons maintenant $\mathfrak{p}_1 \geqq \aleph_1$, $\mathfrak{p}_2 = \aleph_1$. On a $\mathfrak{p}_1 = \dim K_1 \leqq \dim H \leqq \dim K = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \aleph_0 = \mathfrak{p}_1$, donc $\dim H = \mathfrak{p}_1$. D'autre part, les seuls vecteurs k_ι qui puissent être non orthogonaux à K_2 sont ceux pour lesquels $\iota \in I_2$. La projection orthogonale sur K_2 du sous-espace engendré par les k_ι ne peut donc être partout dense dans K_2. Comme la projection orthogonale de H sur K_2 est partout dense dans K_2, on voit que H ne possède aucune base orthonormale, et l'assertion (a) est démontrée.

Enfin, changeant de notations, considérons un espace préhilbertien H tel que $\dim H > \mathfrak{c}$, et soit $(k_\iota)_{\iota \in I}$ un système orthonormal maximal dans H. Soit K le complété de H. Soient K_1 le sous-espace vectoriel fermé de K engendré par les k_ι, et K_2 le sous-espace orthogonal supplémentaire. Si la puissance de I est $\leqq \mathfrak{c}$, on sait qu'il en est de même de la puissance de l'ensemble K_1. La projection orthogonale de H sur K_1 n'est donc pas biunivoque, de sorte que $H \cap K_2 \neq 0$. Ceci contredit le fait que (k_ι) est maximal et établit la propriété (c).

(Reçu le 27 mars 1953)

Approximation properties of orthogonal expansions.

By BÉLA SZ.-NAGY in Szeged.

1. In the approximation theory of Fourier series one considers usually problems of the following type. Given a certain class C of periodic functions $f(x)$, and a non-negative finite valued functional $N(f)$ on C, one asks how rapidly the nth partial sum s_n (or the nth Fejér sum, etc.) of the Fourier series of f tends to f when $n \to \infty$, the distance of f and s_n being measured in the L^p sense with some $p \geqq 1$, the uniform approximation corresponding to $p = \infty$. More precisely, one considers the quantities

$$\varrho_n = \underset{f \in C}{\text{l. u. b.}} \frac{\|f - s_n\|_p}{N(f)}$$

and seeks appropriate estimates *from above* for ϱ_n when $n \to \infty$.

Classes particularly concerned are the Lipschitz classes, the classes of functions having a derivative belonging to a Lipschitz class, etc., the functional $N(f)$ being defined correspondingly as the least Lipschitz constant in question, etc.

W. RUDIN considered in a recent paper[1]), the problem of estimating the quantities ϱ_n *from below*, and not only for the Fourier series, but for *all orthogonal expansions*. He considered namely the approximation in the L^2 sense for the Lipschitz class Lip 1 and for the class C_V of functions of bounded variation. He showed that there are positive absolute constants A, B such that, for the partial sums of any orthogonal expansion on $[0, 1]$, $\varrho_n \geqq A n^{-1}$ for the class Lip 1, and $\varrho_n \geqq B n^{-\frac{1}{2}}$ for the class C_V. Since for the Fourier series expansion we have

$$\varrho_n = O(n^{-1}) \quad \text{and} \quad \varrho_n = O(n^{-\frac{1}{2}}),$$

respectively, it turns thus out that, for the two classes considered and for the approximation in L^2, there is no orthogonal system which would yield expansions converging faster than the Fourier series expansion.

[1]) W. RUDIN, L^2-approximation by partial sums of orthogonal developments, *Duke Math. Journal*, 19 (1952), 1—4.

RUDIN's method depends in its original form rather strongly on properties of the space L^2. However, we shall show that it is possible to find a related method which applies also to approximations in the L^p sense, $p \geqq 1$. So we are able to derive estimates from below for the approximation in the L^p sense for various classes of functions, and for all orthonormal systems.

2. We need the following

Lemma. *Let $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ and $\psi_1, \ldots, \psi_m$ be two orthonormal sets of functions defined on the interval* [0, 1] *i. e.*

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\,dx = \delta_{ij}, \qquad \int_0^1 \psi_h(x)\overline{\psi_k(x)}\,dx = \delta_{hk},$$

and let $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ and $M_1, \ldots, M_m$ be given numbers such that

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leqq n, \qquad M_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

For any $f \in L^2[0, 1]$ put

$$s_n(f) = s_n(f; x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \varphi_i(x)$$

where

$$c_i = (f, \varphi_i) = \int_0^1 f(x)\overline{\varphi_i(x)}\,dx,$$

and consider, for $1 \leqq p \leqq 2$, the quantity

$$\alpha_p = \max_{1 \leqq k \leqq m} \frac{\|\psi_k - s_n(\psi_k)\|_p}{M_k},$$

where

(1) $$\|f\|_p = \left[\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Then

(2) $$\alpha_p \geqq \frac{\sum_{k=1}^m \|\psi_k\|_p - (mn)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{k=1}^m M_k}$$

Proof. Introducing the kernel function

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$$

we can write

$$s_n(\psi_k) = \int_0^1 K(x, y)\psi_k(y)\,dy.$$

Using HÖLDER's inequality we get

$$\sum_{k=1}^{m} \|s_n(\psi_k)\|_p \leqq m^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \|s_n(\psi_k)\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= m \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)\psi_k(y)\,dy \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = m \cdot \mathfrak{M}_p \left\{ \left| \int_0^1 K(x,y)\,\psi_k(y)\,dy \right| \right\},$$

where $q = p/(p-1)$ and $\mathfrak{M}_p$ denotes the mean of power p with respect to the variables x and k. Since $\mathfrak{M}_p$ is an increasing function of p, we have $\mathfrak{M}_p \leqq \mathfrak{M}_2$ for $1 \leqq p \leqq 2$. Thus

$$\sum_{k=1}^{m} \|s_n(\psi_k)\|_p \leqq m \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)\psi_k(y)\,dy \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Using BESSEL's inequality, we get

$$\sum_{k=1}^{m} \|s_n(\psi_k)\|_p \leqq m \left\{ \frac{1}{m} \int_0^1 \left[\int_0^1 |K(x,y)|^2\,dy \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq (mn)^{\frac{1}{2}}.$$

Finally, using MINKOWSKI's inequality, it results that

$$\sum_{k=1}^{m} \|\psi_k\|_p \leqq \sum_{k=1}^{m} \|\psi_k - s_n(\psi_k)\|_p + \sum_{k=1}^{m} \|s_n(\psi_k)\|_p \leqq \alpha_p \sum_{k=1}^{m} M_k + (mn)^{\frac{1}{2}}.$$

This implies (2) and thus proves the lemma.

3. Denote by $C_{r\alpha}$ $(r = 0, 1, \ldots;\ 0 < \alpha \leqq 1)$ the class of all r times continuously differentiable functions $f(x)$ on $[0, 1]$ for which $f^{(r)}(x)$ satisfies a Lipschitz condition of order α (we put $f^{(0)}(x) = f(x)$). For $f \in C_{r\alpha}$ let $N_{r\alpha}(f)$ denote the least Lipschitz constant of order α, i. e.

$$N_{r\alpha}(f) = \underset{x \neq x'}{\text{l. u. b.}} \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x')|}{|x - x'|^{\alpha}}.$$

We remark that the class C_{r1} consists of those functions which are the $(r+1)$th integral of a bounded measurable function, and

$$N_{r1}(f) = \text{vrai max}\, |f^{(r+1)}(x)|.$$

Theorem I. *There exist positive constants $\gamma_{r\alpha}$ depending on their indices only, such that, for an arbitrarily given orthonormal system of functions on* $[0, 1]$

$$\Phi = \{\varphi_i(x)\} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

and for an arbitrarily given system of real or complex numbers

$$\Lambda = \{\lambda_{ni}\} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, n)$$

satisfying the condition

(3) $$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_{ni}|^2 \leqq n,$$

the quantities

$$\varrho_n(r, \alpha, p) = \underset{f \in C_{r\alpha}}{\text{l. u. b.}} \frac{\|f - s_n(f)\|_p}{N_{r\alpha}(f)}, ^{2})$$

where $1 \leqq p \leqq \infty$ *and*

(4) $$s_n(f) = s_n(f; x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ni} c_i \varphi_i(x) \qquad (c_i = (f, \varphi_i)),$$

satisfy the inequalities

(5) $$\varrho_n(r, \alpha, p) \geqq \frac{\gamma_{r\alpha}}{n^{r+\alpha}}.$$

Proof. Observe first that, since the mean power (1) is a non-decreasing function of p, we have

(6) $$\varrho_n(r, \alpha, 1) \leqq \varrho_n(r, \alpha, p) \leqq \varrho_n(r, \alpha, \infty) \quad \text{for} \quad 1 \leqq p \leqq \infty.$$

Now consider the functions

(7) $$\psi_k(x) = \sqrt{2} \cos k\pi x \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

forming an orthonormal system on [0, 1]. They belong to each of the classes $C_{r\alpha}$ and we have

$$N_{r\alpha}(\psi_k) \leqq \sqrt{2}\, 2^{1-\alpha} (k\pi)^{r+\alpha}.$$

Moreover,

$$\|\psi_k\|_1 = \int_0^1 |\psi_k(x)|\, dx = 2\sqrt{2}/\pi.$$

Applying the Lemma to the systems $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ and $\psi_1, \ldots, \psi_m$ with $m = 2n$, $p = 1$, and $M_k = N_{r\alpha}(\psi_k)$, we get

$$\varrho_n(r, \alpha, 1) \geqq \max_{1 \leqq k \leqq n} \frac{\|\psi_k - s_n(\psi_k)\|_1}{N_{r\alpha}(\psi_k)} \geqq \frac{4\sqrt{2}\, n/\pi - \sqrt{2}\, n}{\sqrt{2}\, 2^{1-\alpha} \sum_{k=1}^{2n} (k\pi)^{r+\alpha}}.$$

Since

$$\sum_{k=1}^{2n} k^{r+\alpha} < \int_1^{2n+1} u^{r+\alpha}\, du < \frac{(3n)^{r+\alpha+1}}{r+\alpha+1},$$

it results that

$$\varrho_n(r, \alpha, 1) \geqq \frac{\gamma_{r\alpha}}{n^{r+\alpha}}$$

with

$$\gamma_{r\alpha} = \frac{(4/\pi - 1)(r + \alpha + 1)}{2^{1-\alpha} \pi^{r+\alpha} 3^{r+\alpha+1}}.$$

Owing to (6), this proves the theorem.

---

[2]) Only those f are admitted, for which $N_{r\alpha}(f) > 0$.

4. It is known that there exist constants λ_{ni}, $0 \leqq \lambda_{ni} \leqq 1$, such that if

$$g(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

is the Fourier series of any function $g(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ with period 2π) and with $g^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, then

$$\left| g(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{nk}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leqq \frac{A_{r\alpha}}{n^{r+\alpha}} N_{r\alpha}(g)$$

where $N_{r\alpha}(g)$ is the least Lipschitz constant for $g^{(r)}x$ and $A_{r\alpha}$ is a constant independent of g and n.[3]) The same is true of course for the Fourier series of functions of any other period, and in particular for the even functions with period 2, or, which amounts to the same, for the cosine series of the functions $f(x)$ defined on $[0, 1]$, i. e. for the expansion with respect to the orthonormal cosine system

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{2} \cos k\pi x \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

This means that, for the *cosine system*, and for a *particular choice of* Λ, we have

$$\varrho_n(r, \alpha, p) \leqq \varrho_n(r, \alpha, \infty) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right);$$

thus the estimate (5) is the best possible.

The question if the estimate (5) is the best possible even if $\lambda_{ni} = 1$, i. e. in the case when $s_n(f)$ is the nth *partial sum* of the orthogonal expansion of f, remains open except in the case $r = 0$

In the case of the class $C_{0\alpha}$ $(0 < \alpha \leqq 1)$, i e. for the class of the functions $f(x)$ satisfying themselves a Lipschitz condition of order α, the quantities ϱ_n are of the minimal order $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ e. g. for the *orthonormal system of Haar:*

$$\chi_0(x) = 1, \quad \chi_k(x) = \begin{cases} 2^{i/2} & \text{for } \dfrac{2j}{2^{i+1}} < x < \dfrac{2j+1}{2^{i+1}}, \\ 2^{-i/2} & \text{for } \dfrac{2j+1}{2^{i+1}} < x < \dfrac{2(j+1)}{2^{i+1}}, \\ 0 \text{ elsewhere} & \end{cases}$$

$$(k = 2^i + j; \quad i = 0, 1, \ldots; \quad j = 0, 1, \ldots, 2^i - 1).$$

---

[3]) See, also for further references, B. Sz.-Nagy, Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, *Hungarica Acta Math.*, **1**, n° 3 (1948), 14—52, Theorems IV—VI. We can put e. g. $\lambda_{ni} = \lambda\left(\frac{i}{n}\right)$ with

$$\lambda(u) = \begin{cases} 1 \text{ for } 0 \leqq u \leqq 1/2, \\ 2 - 2u \text{ for } 1/2 \leqq u \leqq 1; \end{cases}$$

in the case $r = 0$, $\alpha < 1$, we can put also $\lambda_{ni} = 1 - \frac{i}{n}$, i. e. we can consider the Fejér sums.

If

$$s_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n-1}(f,\chi_k)\chi_k(x),$$

then[4])

(8) $$f(x)-s_n(f;x)=\frac{1}{|I|}\int_I [f(x)-f(t)\,dt,$$

where $I=I(n,x)$ is a segment containing the point x (eventually as an end-point), of length

$$|I|=2^{-i-1} \quad \text{or} \quad 2^{-i} \quad \text{or} \quad 2^{-i+1},$$

i being determined by the inequalities

$$2^i \leqq n-1 < 2^{i+1}.$$

So we have for $t\in I$ at any case

$$|f(x)-f(t)|\leqq N_{0\alpha}(f)|x-t|^\alpha \leqq N_{0\alpha}(f)2^{(1-i)\alpha}\leqq N_{0\alpha}(f)\,4^\alpha n^{-\alpha},$$

thus, by (8),

$$|f(x)-s_n(f;x)|\leqq N_{0\alpha}(f)\,4^\alpha n^{-\alpha},$$

i. e.

$$\varrho_n(0,\alpha,\infty)\leqq 4^\alpha n^{-\alpha},$$

which, owing to (6), proves our assertion.

5. Let us now consider the class C_r $(r=0,1,\ldots)$ of *all* r times continuously differentiable functions $f(x)$ on $[0,1]$; let $\omega(f^{(r)},\delta)$ be the modulus of continuity of $f^{(r)}(x)$:

$$\omega(f^{(r)},\delta)=\underset{|x-x'|\leqq\delta}{\text{l. u. b.}}|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x')|.$$

Theorem II. *There exist positive constants δ_r depending on r only $(r=0,1,\ldots)$, such that, for any orthonormal system of functions $\Phi=\{\varphi_i\}$ and for any system of factors $\Lambda=\{\lambda_{ni}\}$ satisfying* (3), *we have*

(9) $$\varrho_n(r,p)=\underset{f\in C_r}{\text{l. u. b.}}\frac{\|f-s_n(f)\|_p}{\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)}\geqq\frac{\delta_r}{n^r},$$ [5])

where $s_n(f)$ is defined by (4), *and* $1\leqq p\leqq\infty$.

Proof. Let $\{\psi_k(x)\}$ denote again the system (7); then

$$\omega\left(\psi_k^{(r)},\frac{1}{n}\right)\leqq\sqrt{2}\,(k\pi)^r\frac{k\pi}{n}=\sqrt{2}\,(k\pi)^{r+1}/n.$$

Apply the Lemma to $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$; $\psi_1,\ldots,\psi_{2n}$ with $p=1$ and $M_k=\omega\left(\psi_k^{(r)},\frac{1}{n}\right)$.

4) Cf. A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Inauguraldissertation Göttingen* (1909), pp. 40—43.

5) Only those f are concerned, for which $\omega(f^{(r)},\delta)>0$.

It results that

$$\varrho_n(r,p) \geqq \varrho_n(r,1) \geqq \max_{1\leqq k\leqq n} \frac{\|\psi_k - s_n(\psi_k)\|_1}{\omega\left(\psi_k^{(r)}, \frac{1}{n}\right)} \geqq \frac{4\sqrt{2}\,n/\pi - \sqrt{2}\,n}{\sqrt{2}\sum\limits_{k=1}^{2n}(k\pi)^{r+1}/n} \geqq \frac{\delta_r}{n^r}$$

with

$$\delta_r \geqq \frac{(4/\pi - 1)(r+2)}{\pi^{r+1}\,3^{r+2}}\,.$$

This concludes the proof.

(Received February 1, 1953.)

On relatively regular operators.

By F. V. ATKINSON in Ibadan (Nigeria).

1. In this paper I study various classes of bounded linear operators which map a complex Banach space into the whole or part of itself.

The development of this theory has tended to parallel, subject to a retardation of several decades, the development of integral equation theory. Thus the original discoveries of FREDHOLM were extended to abstract spaces by F. RIESZ and many later writers (see [1] for some references), except as regards the theory of the resolvent; extensions of the latter theory have come a good deal later (see for example RUSTON [2]).

In 1921 a new element was introduced into integral equation theory by F. NOETHER [3], who showed that for integral equations of the second kind with kernels of the principal-value type the homogeneous and the transposed homogeneous equations need not necessarily have the same number of linearly independent eigen-functions; the numbers in question were however still both finite, and furthermore the Fredholm solubility conditions remained in force. While the theory of such integral equations was much developed in the following years, the corresponding abstract theory has been discussed only recently. Z. I. HALILOV [4] has given a fairly direct extension of the Noether theory to normed rings. Extensions of the Noether theory along the lines of the theory of linear operators have been given independently by myself [5] and by GOHBERG [6].

As a further example of this parallel development I may cite MIHLIN's criterion (see for example [7]) for the applicability of the Noether theory to a singular integral equation with a parameter, and its interpretation in terms of the normed ring theory of GELFAND (see [5], [8]).

This paper is devoted to the further extension in which of the homogeneous and transposed homogeneous equations only one need necessarily have a finite number of linearly independent solutions. Here it would seem that the abstract theory parts company with integral equation theory, since I do not know of any organised theory of integral equations with such a property. However it is a simple matter to construct examples of linear operators which behave in this way.

2. Let $\mathfrak{R}$ denote a complex Banach space, not necessarily separable or reflexive [1]), and let $\mathfrak{R}^*$ denote the adjoint space of bounded linear functionals, $\mathfrak{R}_1$ the ring of bounded linear operators whose domain is the whole of $\mathfrak{R}$ and whose range is the whole or part of $\mathfrak{R}$. As in my previous papers [1], [5], for any $T \in \mathfrak{R}_1$ I define two functions $\alpha(T)$, $\beta(T)$, the first being the number of linearly independent solutions of $Tf = 0$, $f \in \mathfrak{R}$, the second being the corresponding number for the adjoint equation $lT = 0$, $l \in \mathfrak{R}^*$.

In studying the properties with which I am here concerned, two types of restriction are commonly imposed on operators $T \in \mathfrak{R}_1$, firstly those relating to $\alpha(T)$, $\beta(T)$, and secondly a supplementary restriction on the mapping given by T, which may take various forms, and without which the condition of the first type does not seem to lead to much in the way of results.

As to conditions of the first type, we may list the following three, in order of increasing generality:

First, that found in the work of FREDHOLM, RIESZ, SCHAUDER, HILDEBRANDT and NIKOL'SKIJ, namely

(A_1) $\qquad \alpha(T) < \infty, \quad \beta(T) < \infty, \quad \alpha(T) = \beta(T).$

Next the condition which is investigated in papers by NOETHER, HALILOV, myself and GOHBERG, namely

(A_2) $\quad \alpha(T) < \infty, \quad \beta(T) < \infty, \quad \alpha(T)$ and $\beta(T)$ not necessarily equal.

Finally the situation with which I am mainly concerned in this paper, namely that

(A_3) of the inequalities $\alpha(T) < \infty$, $\beta(T) < \infty$, at least one should hold.

As to the supplementary condition I note first two alternative forms of the condition encountered in the theory of FREDHOLM, RIESZ, SCHAUDER, HILDEBRANDT and NIKOL'SKIJ, namely

(B_1) the inhomogeneous equation $Tf = g$ $(f, g \in \mathfrak{R})$ is soluble for f provided that $lg = 0$ for all $l \in \mathfrak{R}^*$ such that $lT = 0$,

(B_2) the range $T\mathfrak{R}$ of T is closed.

Of these, (B_1) may be regarded as the abstract formulation of FREDHOLM's solubility conditions. Concerning the equivalence of (B_1) and (B_2) see HAUSDORFF [11].

A slightly different condition which I find it convenient to use here is

(B_3) there exists an $X \in \mathfrak{R}_1$ such that $TXT = T$.

Under the latter condition T may be said to be "relatively regular". The

[1]) I observe here that HAMBURGER [9], in his researches on quasi-nilpotent operators on Hilbert spaces, remarks in a footnote on the possibility of the extension of his results to *reflexive* Banach spaces. Points of contact of this paper with that of HAMBURGER will be noted later.

concept of relative regularity is well known in ring theory and has been investigated by I. KAPLANSKY [10].

3. While, as stated, (B_1) and (B_2) are equivalent, the relationship of (B_3) to these two is not entirely clear.

It is readily seen that the case (B_3) is included in (B_1) or (B_2) [2]). Let us assume (B_3) and deduce for example (B_2). Let g_n $(n = 1, \ldots)$ be a convergent sequence of elements of $T\mathfrak{N}$, with limit g_0, say. It has then to be shown that $g_0 \in T\mathfrak{N}$. In fact, since $g_n \in T\mathfrak{N}$, we have $TXg_n = g_n$, so that $g_0 = \lim g_n = \lim TXg_n = TX \lim g_n = TXg_0$, which proves the result. It is also a simple matter to deduce (B_1) from (B_3).

The converse, that (B_1) or (B_2) implies (B_3), is at any rate true in certain cases. One such case is that in which (A_2) holds; another is that in which $\mathfrak{N}$ is a Hilbert space, not necessarily separable [3]).

4. I give here certain remarks on relatively regular operators, and list some particular cases.

I observe first that the „relative inverse" X may be chosen so that $TXT = T$, $XTX = X$, so that X also is relatively regular. In fact, if T is relatively regular and X has been found so that $TXT = T$, then writing $X' = XTX$, we have identically $TX'T = T$, $X'TX' = X'$.

I next observe that the class of relatively regular operators includes all operators which are "regular", i. e. which have inverses in $\mathfrak{N}_1$. More generally, this class includes operators with right or left inverses in $\mathfrak{N}_1$.

Less trivially, all finite-dimensional operators are relatively regular. If $T \in \mathfrak{N}_1$ is finite-dimensional, let φ_r $(r = 1, \ldots, n)$ be a basis of $T\mathfrak{N}$, with $\varphi_r = Tf_r$ $(r = 1, \ldots, n)$. Let there be constructed n linear functionals $l_r \in \mathfrak{N}^*$ $(r = 1, \ldots, n)$, such that $l_r(\varphi_s) = 1$ $(r = s)$, $= 0$ $(r \neq s)$. We then define U for all $f \in \mathfrak{N}$ by $Uf = \sum_1^n l_r(f) f_r$. The operator thus defined belongs to $\mathfrak{N}_1$, and it is easily verified that $TUT = T$, which proves the result.

Less trivially still, if T has the form $S + V$, where $S \in \mathfrak{N}_1$ has an inverse in $\mathfrak{N}_1$ (in particular if $S = I$, the identity operator) and $V \in \mathfrak{N}_1$ is completely continuous (in particular if V is finite-dimensional), then T is relatively regular. This is in substance a result of the RIESZ theory. By this theory, T satisfies the conditions (A_1) and (B_1), (B_2), which then imply (B_3).

Another example of a relatively regular operator is a projection operator, in particular the zero operator.

---

[2]) For such a result in Hilbert space see HAMBURGER [9], p. 499.

[3]) Details of the construction are given im my paper [5], or again in [1]; the notation there had T_0, U_0 in place of T, X. See also HAMBURGER [9], p. 498.

I conclude this section with two examples of operators which are not relatively regular. In the first place, a completely continuous operator is not relatively regular unless it is finite-dimensional. For let $T \in \mathfrak{R}_1$ be both completely continuous and relatively regular, with $X \in \mathfrak{R}_1$ as a relative inverse. Let Tf_n $(n=1, 2, \ldots)$ be any bounded infinite sequence of elements of $T\mathfrak{R}$. This sequence is the same as the sequence $TXTf_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, and this sequence must contain a convergent subsequence, since T is completely continuous and the sequence XTf_n $(n=1, 2, \ldots)$ is bounded. Thus the linear manifold $T\mathfrak{R}$ has the property that any bounded sequence of its elements contains a convergent subsequence, and by F. RIESZ' converse of the Bolzano—Weierstrass limitpoint theorem, this implies that $T\mathfrak{R}$ is finite-dimensional, as was to be proved.

As a second example, let T belong to an ideal of generalised nilpotent operators; such an ideal is necessarily two-sided. An example of such an operator is given by the integral operator occurring in VOLTERRA's integral equation. Then T cannot be relatively regular. For if X is a relative inverse of T we have, for any positive integral n, $(TX)^n T = T$, showing that $\|(TX)^n\|^{1/n} \geqq 1$, so that TX cannot be generalised nilpotent.

5. In setting up classifications of operators according to these ideas I denote by $\mathfrak{C}(m, n, B_r)$ the set of all $T \in \mathfrak{R}_1$ such that $\alpha(T) = m$, $\beta(T) = n$, and such that T satisfies the supplementary condition (B_r), where r stands for 1, 2 or 3. The cases $m = \infty$, $n < \infty$ and $m < \infty$, $n = \infty$, are not excluded. I shall be concerned mainly with the restriction (B_3); as has been explained, if m and n are both finite, or again if $\mathfrak{R}$ is a Hilbert space, the choice of (B_1), (B_2) or (B_3) is a matter of indifference.

It will further be convenient to denote by $\mathfrak{D}(m, n, B_r)$ the set of all $T \in \mathfrak{R}_1$ such that $\alpha(T) \leqq m$, $\beta(T) \leqq n$, and which satisfy (B_r).

Problems which then arise for discussion may be classified as

(i) *algebraical problems,* such as the nature of products of operators of these classes, or the nature of their factors,

(ii) *topological problems,* such as the result of applying various perturbations to operators of these classes, and whether these classes are open or closed in $\mathfrak{R}_1$,

(iii) *spectral problems,* primarily the study of the regions of the complex λ-plane for which $T - \lambda I$ belongs to one or other of these classes. More generally, we may replace $T - \lambda I$ by an integral function of λ with values in $\mathfrak{R}_1$, or introduce two complex parameters, and so on.

The answers to such questions are largely known in the cases in which both $\alpha(T)$ and $\beta(T)$ are finite; my main purpose here is therefore to carry out certain extensions to all those cases in which at least one of these numbers is finite.

6. In this and the next section I note two simple algebraical properties. The second of these will be needed in what follows, while the first has some bearing on later results and perhaps some intrinsic interest.

Theorem 1. *If* $U, V \in \mathfrak{R}_1$ *and* $I - UV \in \mathfrak{C}(m, n, B_r)$, *then* $I - VU \in \mathfrak{C}(m, n, B_r)$, *where* $r = 1, 2$, *or* 3.

I first prove the statement as it affects the properties (B_r). (B_1) and (B_2) being equivalent, we consider first (B_2), and have to prove that if $I - UV$ has a closed range, then so has $I - VU$. Let $(I - VU)f_n$ be a convergent sequence of elements of $(I - VU)\mathfrak{R}$, with limit g, say. We have then $U(I - VU)f_n \to Ug$, or $(I - UV)Uf_n \to Ug$, and if $(I - UV)\mathfrak{R}$ is closed we may therefore write $Ug = (I - UV)h$. Hence we derive $g = (I - VU)(g + Vh)$, so that $g \in (I - VU)\mathfrak{R}$, as was to be proved.

As regards (B_3), we have to prove that if $I - UV$ is relatively regular, then so is $I - VU$. Assuming then that there exists an $X \in \mathfrak{R}_1$ such that $(I - UV)X(I - UV) = I - UV$, the desired result follows from the identity $(I - VU)(VXU + I)(I - VU) = I - VU$.

Finally we have to prove the results

$$\alpha(I - UV) = \alpha(I - VU), \quad \beta(I - UV) = \beta(I - VU);$$

the cases in which one or both of these numbers is infinite are not excluded. It will be sufficient to prove the first of these results, that of the other being similar.

Let then $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ denote respectively the sets of elements $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{R}$ such that $(I - UV)\varphi = 0$, $(I - VU)\varphi' = 0$. We have then $\mathfrak{S}_1 = UV\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2 = VU\mathfrak{S}_2$, and hence, considering the dimension-numbers, possibly infinite, of these manifolds, $\dim(V\mathfrak{S}_1) = \dim(\mathfrak{S}_1)$, $\dim(U\mathfrak{S}_2) = \dim(\mathfrak{S}_2)$. On the other hand, $(I - UV)\varphi = 0$ implies $(I - VU)V\varphi = 0$, so that $V\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, and similarly $U\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_1$; hence we deduce $\dim(V\mathfrak{S}_1) \leqq \dim(\mathfrak{S}_2)$, $\dim(U\mathfrak{S}_2) \leqq \dim(\mathfrak{S}_1)$. From these two pairs of results we have $\dim(\mathfrak{S}_1) \leqq \dim(\mathfrak{S}_2)$, $\dim(\mathfrak{S}_2) \leqq \dim(\mathfrak{S}_1)$, showing that $\dim(\mathfrak{S}_1) = \dim(\mathfrak{S}_2)$, or in other words $\alpha(I - UV) = \alpha(I - VU)$, the result stated.

7. The second result of this kind is

Theorem 2. *If* $T, X \in \mathfrak{R}_1$, *and* $TXT - T \in \mathfrak{C}(m, n, B_r)$, *then* $T \in \mathfrak{D}(m, n, B_r)$, *where* $r = 1, 2$ *or* 3.

Since $T\varphi = 0$, $\varphi \in \mathfrak{R}$ implies $(TXT - T)\varphi = 0$, it is trivial that $\alpha(T) \leqq \alpha(TXT - T)$, and similarly that $\beta(T) \leqq \beta(TXT - T)$, so that all that has to be proved is that if $TXT - T$ satisfies one of the properties (B_1), (B_2) or (B_3), then so does T.

As regards (B_1) or (B_2), it will be sufficient to prove that if $TXT - T$ has a closed range, then so has T. Let then Tf_n be a convergent sequence, with limit g, say. Then $(TXT-T)f_n \to (TX-I)g$, and if $TXT-T$ has a closed range we may therefore write $(TX-I)g=(TXT-T)h$, so that $g=TXg-(TXT-T)h$, showing that $g \in T\mathfrak{R}$, as required.

Finally I prove that if $TXT-T$ is relatively regular, then so is T. Let there exist a Y such that $(TXT-T)Y(TXT-T)=TXT-T$; it then follows that $T\{X-(XT-I)Y(TX-I)\}T=T$, which establishes the result and completes the proof of the theorem.

The particular case of this result which will be used is that if $TXT-T$ is finite-dimensional, then T is relatively regular. This follows from Theorem 2 since, as proved in § 4, finite-dimensional operators are relatively regular.

8. Continuing the subject of algebraic properties of relatively regular operators, I consider in this section conditions under which factors of such operators have the same property, extending some previous results on this subject.

In the result to be proved, and in most subsequent theorems, there is a dual or adjoint form of the result which will at most be enunciated, the proof introducing no new feature.

T h e o r e m 3. *Let $S, T \in \mathfrak{R}_1$ be such that $ST \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, where $m < \infty$. Then $T \in \mathfrak{D}(m, \infty, B_3)$.*

It is trivial that $\alpha(T) \leqq \alpha(ST) = m$, and thus all that has to be proved is that T is relatively regular.

By hypothesis there exists an $X \in \mathfrak{R}_1$ such that $STXST-ST=0$, i. e. such that $ST(XST-I)=0$. Since by hypothesis $\alpha(ST) < \infty$, it follows that $XST-I$ is finite-dimensional, and hence also $TXST-T$. As pointed out in § 4, such an operator is relatively regular, and by Theorem 2 it follows that T itself is relatively regular, as was to be proved. This proves the theorem.

I may mention that it would also follow that T was relatively regular if instead of $\alpha(ST) < \infty$ we assume $\alpha(S) < \infty$.

The dual result is

T h e o r e m 3'. *Let $S, T \in \mathfrak{R}_1$ be such that $ST \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, where $n < \infty$. Then $S \in \mathfrak{D}(\infty, n, B_3)$.*

The proof is omitted, being similar to that of Theorem 3.

In particular, if ST is a "generalised Fredholm operator", i. e. satisfies (A_2) and any of the (then equivalent) (B_ν), then both S and T are relatively regular. The special case that if both ST and TS are generalised Fredholm operators, then so are S and T was shown by me in a previous paper [5].

9. I now deduce a result on the products of such operators.

T h e o r e m 4. *Let $S \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, $T \in \mathfrak{C}(m', n', B_3)$, where $m < \infty$, $m' < \infty$. Then $ST \in \mathfrak{D}(m+m', n+n', B_3)$.*

By hypothesis there exist $U, V \in \mathfrak{R}_1$ such that $SUS-S=0$, $TVT-T=0$ Then $S(US-I)=0$, $T(VT-T)=0$, and since $\alpha(S)<\infty$, $\alpha(T)<\infty$, we have that $US-I$, $VT-I$ are finite-dimensional.

Writing now

$$VUST=I+(VT-I)+V(US-I)T,$$

it appears that $VUST$ can be put in the form $I+K$, where K is finite-dimensional. This, as mentioned in § 4, is an operator of Fredholm—Riesz type, so that we have $VUST \in \mathfrak{C}(m'', m'', B_3)$ for some $m''<\infty$. It now follows by Theorem 3 that ST is relatively regular.

It remains to prove that $\alpha(ST) \leqq \alpha(S)+\alpha(T)$, $\beta(ST) \leqq \beta(S)+\beta(T)$; it will be sufficient to give the proof of the first of these. In fact if $ST\varphi=0$, $\varphi \in \mathfrak{R}$, we must have $T\varphi=\psi$ (say), where $S\psi=0$. The result now follows from the fact that of these last two equations, the set of solutions of the first is of dimensionality $\alpha(T)$ if the equation is soluble at all, while the set of solutions of the second is of dimensionality $\alpha(S)$. This completes the proof of Theorem 4.

The dual result is

Theorem 4′. *Let* $S \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, $T \in \mathfrak{C}(m', n', B_3)$, *where* $n<\infty, n'<\infty$. *Then* $ST \in \mathfrak{D}(m+m', n+n, B_3)$.

10. The above result suggest the following problems:

(i) whether the product of two relatively regular operators is itself relatively regular,

(ii) whether the left or right divisors of relatively regular operators are themselves relatively regular.

These results were proved above subject to one-sided restrictions on the dimensionality of the null-manifolds associated with these operators.

Milder conjectures would be that (B_1) or (B_2) could replace (B_3) in Theorems 3 and 4. In essence these theorems would then run as follows (if true):

(iii) if ST has a closed range and $\alpha(ST)<\infty$, then T has a closed range,

(iv) if S and T have closed ranges, and $\alpha(S)<\infty$, $\alpha(T)<\infty$, then ST has a closed range.

11. In an earlier paper [5] I showed that the index $\gamma(T)$, defined by $\gamma(T)=\alpha(T)-\beta(T)$, has under certain conditions the logarithmic property $\gamma(ST)=\gamma(S)+\gamma(T)$. My aim in this section is to extend this property to cases in which the index is, in one or both cases, infinite.

I take first the case in which of $\gamma(S)$, $\gamma(T)$ one is finite, the other being equal to $(-\infty)$. We have

Theorem 5. *Let* $S \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, $T \in \mathfrak{C}(m', \infty, B_3)$, *where* $m, n, m' < \infty$. *The logarithmic law for the index then holds in the sense that* $ST \in \mathfrak{C}(m'', \infty, B_3)$, $TS \in \mathfrak{C}(m''', \infty, B_3)$, *where* $m'', m''' \leqq m + m'$.

The only parts of this theorem which are not included in Theorem 4 are the statements that $\beta(ST) = \infty$, $\beta(TS) = \infty$. The latter statement follows from the trivial result that $\beta(T) \leqq \beta(TS)$, so that we have only to establish the former.

Now let $l_r \in \mathfrak{R}^*(r = 1, 2, \ldots)$ be an infinite sequence of functionals, any finite set of which are linearly independent, such that $l_r T = 0$. We wish to form a linear combination of the $l_r (r = 1, \ldots, m + 1)$, say

$$l_1^* = \sum_{r=1}^{m+1} \alpha_r l_r,$$

the α_r being complex scalars, which admits the representation $l_1^* = k_1 S$ $(k_1 \in \mathfrak{R}^*)$. The latter equation is soluble for k_1 provided that $l_1^* \varphi = 0$ for all $\varphi \in \mathfrak{R}$ such that $S\varphi = 0$; this is the dual of the normal solubility condition (B_1) for S, and is a consequence of (B_3) for S. Let then $\varphi_r \in \mathfrak{R}$ $(r = 1, \ldots, m)$ be a basis of the set of such φ. The condition for solubility may then be written

$$\sum_{r=1}^{m+1} \alpha_r l_r(\varphi_s) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m).$$

This, being a set of m homogeneous equations in the $m + 1$ unknowns α_r, must have a non-trivial solution. Thus k_1 can be found, and is not the zero functional. In a similar way we can derive a second functional k_2 from the $l_r (r = m + 2, \ldots, 2m + 2)$, and so on indefinitely. Moreover, any finite set of the k_r will be linearly independent, since this is so for the l_r. Since all the k_r are such that $k_r ST = 0$, it follows that $\beta(ST) = \infty$, as asserted.

The dual result is

Theorem 5'. *Let* $S \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$ *and let* $T \in \mathfrak{C}(\infty, n' B_3)$, *where* $m, n, n' < \infty$. *Then* $ST \in \mathfrak{C}(\infty, n'', B_3)$, $TS \in \mathfrak{C}(\infty, n''', B_3)$, *where* $n'', n''' \leqq n + n'$.

This is of course the case in which $\gamma(S)$ is finite and $\gamma(T)$ equals $+\infty$.

The cases in which $\gamma(S)$ and $\gamma(T)$ are both equal to $+\infty$ or to $-\infty$ are trivial. The results are

Theorem 6. *Let* $S \in \mathfrak{C}(m, \infty, B_3)$, $T \in \mathfrak{C}(m', \infty, B_3)$, *where* $m, m' < \infty$. *Then* $ST \in \mathfrak{C}(m'', \infty, B_3)$, *where* $m'' \leqq m + m'$.

Theorem 6'. *Let* $S \in \mathfrak{C}(\infty, n, B_3)$, $T \in \mathfrak{C}(\infty, n', B_3)$, *where* $n, n' < \infty$. *Then* $ST \in \mathfrak{C}(\infty, n''. B_3)$, *where* $n'' \leqq n + n'$.

For Theorem 6, for instance, statement that $\beta(ST) = \infty$ follows from the elementary result $\beta(ST) \geqq \beta(S)$, and similarly for Theorem 6'.

Finally, as a consequence, we have a result on the case in which $\gamma(S)$ and $\gamma(T)$ are infinite with opposite signs.

Theorem 7. *Let $ST \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, where $m, n < \infty$. The logarithmic law then holds in the sense that if $\gamma(S) = +\infty$, then $\gamma(T) = -\infty$, and conversely.*

Assume say that $\gamma(S) = +\infty$, say $S \in \mathfrak{C}(\infty, n', B_2)$, where $n' < \infty$. Since $\alpha(T) \leqq \alpha(ST) < \infty$, $\gamma(T)$ can be either finite or equal to $-\infty$; it cannot equal $+\infty$. We have therefore only to reject the possibility of $\gamma(T)$ being finite, or in fact the possibility of $\beta(T)$ being finite. Suppose then if possible that $T \in \mathfrak{C}(m', n'', B_3)$, where $m', n'' < \infty$. It would then follow by Theorem 5′ that $m = \alpha(ST) = \infty$, contrary to hypothesis. This proves the result. The converse assertion may be proved similarly.

12. I now pass to problems of the second type, namely those concerning the neighbourhoods of an operator of the type considered. There are three types of perturbation to be considered, firstly perturbation by the addition of a general element of $\mathfrak{R}_1$ of suitably small norm, secondly perturbation by the addition of a completely continuous operator, not necessarily small, and lastly perturbation by the addition of an operator which is small and which depends analytically upon a scalar complex parameter.

In this section I treat the case of a small general perturbation. I note first a previous result of mine [5], that if $T \in \mathfrak{R}_1$ is such that $\alpha(T)$ and $\beta(T)$ are both finite and T satisfies (B_1), or of course (B_2) or (B_3), then for $T' \in \mathfrak{R}_1$ lying in a neighbourhood of T the same conditions hold, the index being thereby stable, so that $\gamma(T') = \gamma(T)$. The additional information that $\alpha(T') \leqq \alpha(T)$, together with an extension to unbounded operators, has been given by Kreĭn and Krasnosel'skij [12]; see also B. Sz.-Nagy [13].

Here I wish to extend such results to the case in which only one of $\alpha(T), \beta(T)$ is assumed to be finite[4]). I prove first

Theorem 8. *Let $T \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$ where at least one of m, n is finite. Then there exists a positive number ϱ, such that if $T' \in \mathfrak{R}_1$, $\|T' - T\| < \varrho$, then $T' \in \mathfrak{D}(m, n, B_3)$.*

By hypothesis there exists an $X \in \mathfrak{R}_1$ such that $TXT - T = 0$. Suppose first that $m = \alpha(T) < \infty$. Since $T(XT - I) = 0$ it follows that $XT - I$ is finite-dimensional, of dimensionality not exceeding m.

Write now $A = T' - T$, where $\|A\| < \varrho$, and ϱ is to be chosen later. Following the argument of §5 of my previous paper [1] I write

$$XT' = (I + XA) + (XT - I),$$

whence it appears that if we take $\varrho < \|X\|^{-1}$, then XT' can be represented

[4]) In the above-cited paper [11] Kreĭn and Krasnosel'skij refer to a previous paper (of which I have unfortunately not yet able to get a copy) by them and D. P. Mil'man [14] where there appears a partial extension along these lines, to the effect that if $\alpha(T) = 0$, then $\beta(T') = \beta(T)$, even if $\beta(T)$ is unbounded.

as the sum of an operator with an inverse in $\mathfrak{R}$, and a finite-dimensional operator, and, as mentioned in § 4, forms a trivial case of the Riesz theory. Thus by Theorem 3 it follows that T' is relatively regular.

It remains to prove that $\alpha(T') \leqq \alpha(T) = m$, the latter being assumed finite. As in § 5 of [1], this follows from the equation

$$(I+XA)^{-1}XT' = I + (I+XA)^{-1}(XT-I).$$

The argument is of course similar if we assume $n = \beta(T) < \infty$.

Next I prove the result regarding stability of the index.

Theorem 9. *Let $T \in \mathfrak{C}(m, \infty, B_3)$, where $m < \infty$, so that $\gamma(T) = -\infty$. Then there is a positive ϱ such that if $T' \in \mathfrak{R}$, $\|T'-T\| < \varrho$, then $T' \in \mathfrak{C}(m', \infty, B_3)$, where $m \leqq m$, so that $\gamma(T') = -\infty$.*

In view of the result of Theorem 8, it is only necessary to prove that $\beta(T') = \infty$. As in the proof of Theorem 8, $XT-I$ is finite-dimensional, so that XT is of Fredholm-Riesz type. Since $\gamma(T) = -\infty$, we deduce that $\gamma(X) = \infty$. Furthermore, again as in the proof of Theorem 8, XT' will also be of Fredholm-Riesz type, and applying Theorem 7 once more we deduce from the fact that $\gamma(X) = \infty$ the result that $\gamma(T') = -\infty$, showing that $\beta(T') = \infty$, as required.

13. I now consider perturbations by a completely continuous operator, not necessarily small. In [5] I have proved the result that if $T \in \mathfrak{C}(m, n, B_1)$, where $m, n < \infty$, and $V \in \mathfrak{R}$, is completely continuous, then $T+V \in \mathfrak{C}(m', n', B_1)$, where $m', n' < \infty$ and $\gamma(T+V) = \gamma(T)$. KREIN and KRASNOSEL'SKIJ [11] have given a result in some ways more general than this, in that T need not be bounded, but more special in other ways, in particular in that the perturbing operator is to be finite-dimensional instead of completely continuous; see however B. SZ.-NAGY [13]. I now give an extension to the case of an infinite index, namely

Theorem 10. *Let $T \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, where at least one of m, n is finite, and let $V \in \mathfrak{R}_1$ be completely continuous. Then $T+V \in \mathfrak{C}(m', n', B_3)$, where $m' < \infty$ if $m < \infty$, and $n' < \infty$ if $n < \infty$.*

As before there exists $X \in \mathfrak{R}_1$ such that $TXT-T=0$. Assuming first that $m = \alpha(T) < \infty$, we have that $XT-I$ is finite-dimensional. Writing

$$X(T+V) = I + XV + (XT-I),$$

it appears that $X(T+V)$ can be represented as the sum of the identity operator, a completely continuous operator, and a finite-dimensional operator, so that $X(T+V)$ is an operator of Fredholm-Riesz type. Thus by Theorem 3 it follows that $T+V$ is relatively regular, and also that $\alpha(T+V) < \infty$.

The case in which $n = \beta(T) < \infty$ is of course discussed similarly.

As regards the stability of the index we have

Theorem 11. *Let* $T \in \mathfrak{C}(m, \infty, B_3)$, *where* $m < \infty$, *so that* $\gamma(T) = -\infty$, *and let* $V \in \mathfrak{R}_1$ *be completely continuous. Then* $T + V \in \mathfrak{C}(m', \infty, B_3)$, *where* $m' < \infty$, *so that* $\gamma(T + V) = -\infty$.

The proof, like that of Theorem 9, proceeds by application of Theorem 7 to the operators $XT, X(T+V)$.

The result can be dualised in an obvious way.

14. Before proceeding to analytic perturbations, I remark that the results of the last two sections are in some ways best possible results.

We have shown for example that the set of all $T \in \mathfrak{R}_1$ such that at least one of $\alpha(T), \beta(T)$ is finite and such that T is relatively regular is an open set in $\mathfrak{R}_1$. If we relax the restriction on $\alpha(T), \beta(T)$ the result would become that the set of all $T \in \mathfrak{R}_1$ which are relatively regular is open. This however is true only if $\mathfrak{R}$ is finite-dimensional. For the zero operator is relatively regular, and if all T in a neighbourhood of zero of the form $\|T\| < \varrho$ were also to be relatively regular, then so would all $T \in \mathfrak{R}_1$, by multiplication by a suitable scalar. This however is only possible when $\mathfrak{R}$ is finite-dimensional[5]), since otherwise we could construct a $T \in \mathfrak{R}_1$ which was completely continuous without being finite-dimensional, and which would therefore not be relatively regular, as mentioned in § 4.

In the same way the statement that if T is relatively regular and V is completely continuous, then $T+V$ is also relatively regular, is not necessarily true without the restriction that at least one of $\alpha(T), \beta(T)$ should be finite. This again is shown by the particular case $T = 0$. We can however assert that if T is relatively regular and K is finite-dimensional, then $T+K$ is relatively regular. This follows easily from Theorem 2, since if $TXT - T = 0$, then $(T+K)X(T+K) - (T+K)$ is finite-dimensional. We may regard this as a consequence of the fact that the finite-dimensional operators form an ideal (left and right) of relatively regular operators in the ring $\mathfrak{R}_1$, though whether there are any other such ideals which are not trivial is not obvious.

15. The rest of this paper is devoted to the case in which $T = T_\lambda$ depends analytically upon a complex scalar parameter λ. In this section I consider the behaviour of T_λ in the small; the basic fact to be established is that in the neighbourhood of any λ-value, under certain restrictions, the functions $\alpha(T_\lambda)$ and $\beta(T_\lambda)$ take constant values, not exceeding their values at the λ-value in question. In the case in which both values are finite this result is known[6]). Here therefore I give the extension to the case in which only one

[5]) See Kaplansky [10].

[6]) See for instance my previous paper [1]: the argument there was applied to a case in which α and β had equal values and in which T_λ had a special polynomial form, but applies more generally. See also the papers of Gohberg cited in [1].

of α and β need be finite. Without loss of generality we may take the perturbation to be about $\lambda=0$. I prove now

Theorem 12. *Let $T \in \mathfrak{C}(m, \infty, B_3)$, where $m<\infty$, and let A_λ be an analytic function of λ, with values in $\mathfrak{R}_1$, defined in a neighbourhood of $\lambda=0$ and vanishing at $\lambda=0$. Then there is a positive number ϱ and a non-negative integer m' with $m' \leqq m$, such that for $0<|\lambda|<\varrho$ we have $T-A_\lambda \in \mathfrak{C}(m', \infty, B_3)$.*

Taking $X \in \mathfrak{R}_1$ such that $TXT=T$, and writing $P_1=I-XT$, so that P_1 is of finite dimensionality not exceeding m, we derive the equation

$$(I-XA_\lambda)^{-1}X(T-A_\lambda)=I-(I-XA_\lambda)^{-1}P_1,$$

valid at any rate if $(I-XA_\lambda)$ has an inverse, and so in a λ-region of the form $|\lambda|<\sigma$ for some positive σ. The reasoning by which it is deduced that $\alpha(T-A_\lambda)$ takes a constant value, not exceeding $\alpha(T)$, in a region of the form $0<|\lambda|<\varrho$, has already been given in §§ 5—7 of [1].

The remaining assertions of this theorem, that for $0<|\lambda|<\varrho$ we have that $T-A_\lambda$ is relatively regular with $\beta(T-A_\lambda)=\infty$ follow from Theorem 9. This completes the proof of Theorem 12.

Theorem 12 can of course be dualised.

16. I now pass to deductions regarding the behaviour in the large. With the assumptions and notation of Theorem 12, let us consider the maximal connected region which includes $\lambda=0$ and such that for every λ-value in this region $T-A_\lambda$ exists, is relatively regular and furthermore $\alpha(T-A_\lambda)<\infty$. By Theorem 12, this λ-region is non-empty and is open in the complex λ-plane.

The basic fact now to be established is that in this region we have almost everywhere $\alpha(T-A_\lambda)=m'$, $\beta(T-A_\lambda)=\infty$; more precisely, we have $\beta(T-A_\lambda)=\infty$ everywhere in this region, and $\alpha(T-A_\lambda)=m'$ everywhere except possibly at isolated points, with no limit point in this region, at which $m'<\alpha(T-A_\lambda)<\infty$. Such isolated points form a natural generalisation of the concept of an eigen-value. We have by Theorem 12 that $\alpha(T-A_\lambda)=m'$, $\beta(T-A_\lambda)=\infty$ in a region of the form $0<|\lambda|<\varrho$; the extension to the whole λ-region with the above-noted exceptional points is achieved by the argument given for a more special case in § 8 of [1].

It may happen that this λ-region covers the entire λ-plane. This will for example be the case if T_λ has the form $T+\sum_1^\infty \lambda^r V_r$, where T satisfies the conditions of Theorem 12, the V_r are completely continuous, and the series is absolutely convergent for all λ; a more special case of this kind was the subject of [1]. Another example with this property would be $T_\lambda=T-\lambda A$, where T satisfies the conditions of Theorem 12 and A belongs to an ideal of generalised nilpotent operators.

17. I now discuss the notions in spectral theory which accord best with the ideas of the present paper. Let as before T_λ denote an analytic function of λ with values in $\mathfrak{R}_1$; for simplicity we will take T_λ to be an integral function. The standard case $T_\lambda = T - \lambda I$ is of course included.

Let us denote by $\mathfrak{S}(B_3)$ the set of all λ-values for which T_λ is relatively regular, and by $\mathfrak{S}_0(B_3)$ the subset of $\mathfrak{S}(B_3)$ of λ-values for which in addition at least one of $\alpha(T_\lambda), \beta(T_\lambda)$ is finite. By Theorem 8, or Theorem 12, $\mathfrak{S}_0(B_3)$ is an open set; the example $T_\lambda = \lambda V$, where V is completely continuous, shows that $\mathfrak{S}(B_3)$ need not be an open set.

We know that every λ-value in $\mathfrak{S}_0(B_3)$ is an interior point of an open λ-region in which the functions α and β take constant values almost everywhere. The case in which one of these values is infinite was examined in the last two sections; as already mentioned, the case in which both values are finite has been dealt with in previous papers. Our procedure is then to divide up $\mathfrak{S}_0(B_3)$ into these open regions.

Let then m, n denote a pair of numbers, admissible values for which are zero, any positive integer, or $+\infty$, with the proviso that at least one of m and n must be finite. Corresponding to any such pair m, n there can exist at most a denumerable sequence of open connected regions of the λ-plane, which we denote by $\mathfrak{S}_r(m, n, B_3)$ $(r = 1, 2, \ldots)$, and with the property that in any one of them $T_\lambda \in \mathfrak{C}(m, n, B_3)$, with the possible exception of at most a denumerable sequence of isolated points, the generalised eigen-values, at which $T_\lambda \in \mathfrak{C}(m+k, n+k, B_3)$, for some varying positive k.

We show later how within any such region $\mathfrak{S}_r(m, n, B_3)$ we may associate with T_λ certain meromorphic functions with singularities at the generalised eigen-values.

18. Before proceeding to a detailed analysis of one of these regions $\mathfrak{S}_r(m, n, B_3)$ it will perhaps be useful to compare the above system of spectral classification with other known classifications.

Closely related to the above classification are the concept of the Fredholm region and its generalisations. The Fredholm region, introduced by NIKOL'SKIJ (see [1] for reference) in the case in which T_λ depends linearly on λ, will consist of the totality of sets $\mathfrak{S}_r(m, m, B_3)$, where $m < \infty$, i. e. the set of λ for which $\alpha(T_\lambda) = \beta(T_\lambda) < \infty$ and for which T_λ is relatively regular or, what comes to the same thing, satisfies (B_1) or (B_2). The corresponding region in which $\alpha(T_\lambda)$ and $\beta(T_\lambda)$ are both finite but not necessarily equal was termed by me ([5], p. 11) the "generalised Fredholm region" and by GOHBERG (see [1] for reference) the "Noether region". Here of course I am concerned with a still more general region, in which only one of $\alpha(T_\lambda), \beta(T_\lambda)$ need be finite, T_λ still being relatively regular.

Rather less appropriate for the present purpose are the notions of spectral classification which arise naturally in the spectral theory of self-adjoint operators on Hilbert space. Taking for example the formulations of HILLE ([15], pp. 31, 97) and translating them into the terminology of the present paper we should classify the λ-values as follows:

(i) resolvent set, such that $T_\lambda \in \mathfrak{C}(0, 0, B_3)$,

(ii) spectrum, such that T_λ does not belong to $\mathfrak{C}(0, 0, B_3)$.

The spectrum would then be subdivided as follows:

(iii) point spectrum, such that $\alpha(T_\lambda) > 0$, whether T_λ is relatively regular or not,

(iv) residual spectrum, such that $\alpha(T_\lambda) = 0, \beta(T_\lambda) > 0$, again whether T_λ is relatively regular or not,

(v) continuous spectrum, such that $\alpha(T_\lambda) = \beta(T_\lambda) = 0$, but such that T_λ is not relatively regular.

A further definition would be that points belonging to the "point spectrum" would be termed "characteristic values".

To illustrate the effect of these classifications by examples, a set of the form $\mathfrak{S}_r(0, 1, B_3)$ would go into the residual spectrum except for what we have called generalised eigen-values which would go into the point spectrum; a set of the form $\mathfrak{S}_r(1, 0, B_3)$, or of the form $\mathfrak{S}_r(1, 2, B_3)$ would go entirely into the point spectrum. The classification would thus obscure the essential similarities between the various regions $\mathfrak{S}_r(m, n, B_3)$, and in addition would lump together operators which are relatively regular with those that are not.

Certain classifications introduced by HAMBURGER [9] should also be mentioned for comparison. HAMBURGER considers the spectral character of an operator with respect to a subspace $\mathfrak{M}$ of the Hilbert space $\mathfrak{H}$; here I translate some of his definitions into the terms of the present paper in the special case in which $\mathfrak{M}$ coincides with $\mathfrak{H}$. An improper eigen-value is a value λ such that $\alpha(T_\lambda) > 0, \beta(T_\lambda) = 0$, whether T_λ is relatively regular or not. The set of such λ's forms the co-residual spectrum, the adjoint concept to the residual spectrum. If, I now observe, we revise the definition (iii) of the point spectrum to be that $\alpha(T_\lambda) > 0$ and $\beta(T_\lambda) > 0$, we obtain a partition of the spectrum which is at any rate symmetrical as between $\alpha(T_\lambda)$ and $\beta(T_\lambda)$, but which does not entirely remove the above objections.

A further definition of HAMBURGER is that λ is to be called a point of the first or the second kind according as T_λ has or has not a closed range. In the present terminology I would write the set of points of the first kind as $\mathfrak{S}(B_2)$. Since relative regularity implies the closed range property we have, for a Banach space, $\mathfrak{S}(B_2) \supseteq \mathfrak{S}(B_3)$, the two sets coinciding if $\mathfrak{R}$ is a Hilbert space. For the case $T_\lambda = A - \lambda I$, HAMBURGER states (loc. cit. p. 505) that the set of points of the first kind form an open set.

19. I now pass to the theory of the analytic functions which may be associated with T_λ in a particular region $\mathfrak{S}_r(m, n, B_3)$; as previously, at least one of m, n must be finite. These functions are three in number, one forming a generalisation of the resolvent, and two being projection operators characterising the left and right null-manifolds of T_λ, in cases of course in which $m, n > 0$.

Assume then that T is an integral function of λ with values in $\mathfrak{R}_1$, and let λ_0 be a point of one of the corresponding λ-regions $\mathfrak{S}_r(m, n, B_r)$, which region we denote for brevity by $\mathfrak{S}_0$. Varying the notation of § 15, I write $T_\lambda = T_{\lambda_0} - A_\lambda = T_0 - A$, so that $A = 0$ when $\lambda = \lambda_0$. I assume that λ_0 is not a generalised eigen-value, so that $\alpha(T_0) = m, \beta(T_0) = n$; this restriction has sense of course only if m and n are not both infinite. Let X_0 be a relative inverse of T_0, so that $T_0 X_0 T_0 = T_0$, $X_0 T_0 X_0 = X_0$. Write also $P_{10} = I - X_0 T_0$, $P_{20} = I - T_0 X_0$, so that P_{10} and P_{20} are projection operators whose ranges on $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{R}^*$ are the right and left null-manifolds of T_0.

The problem is then to find analytic expressions for $X_\lambda, P_{1\lambda}, P_{2\lambda}$ which fulfil the same roles for T_λ, for all $\lambda \in \mathfrak{S}_0$, except possibly at the generalised eigen-values in $\mathfrak{S}_0$. It is easily shown that for λ in a neighbourhood of λ_0 such functions are given by

(19. 1) $$X_\lambda = (I - X_0 A)^{-1} X_0 = X_0 (I - A X_0)^{-1},$$

(19. 2) $$P_{1\lambda} = I - X_\lambda T_\lambda = (I - X_0 A)^{-1} P_{10},$$

(19. 3) $$P_{2\lambda} = I - T_\lambda X_\lambda = P_{20} (I - A X_0)^{-1} .$$

Concerning these definitions I remark firstly that they have sense for all λ such that $(I - X_0 A)$ and $(I - A X_0)$ have inverses in $\mathfrak{R}_1$. Secondly, these two conditions are equivalent, that is to say $(I - X_0 A)$ and $(I - A X_0)$ will both or neither have inverses; this is a rather special case of Theorem 1. Thirdly I remark that the equivalence of the alternative forms given in each of (19. 1-3) can be verified by simple calculations, assuming that $(I - A X_0), (I - X_0 A)$ have inverses.

More precisely, we can set up a spectral classification of λ-values into open connected regions $\mathfrak{S}'_r(m, n, B_3)$ for the operators $I - X_0 A$, $I - A X_0$, the regions being identical for these two operator-functions by Theorem 1. My main concern here is with the particular one of these regions which contains λ_0. Since these operators have inverses near λ_0, this region will be of the form $\mathfrak{S}'_r(0, 0, B_3)$, and for brevity I denote it by $\mathfrak{S}'_0$. These two operators will then have inverses throughout $\mathfrak{S}'_0$, with the possible exception of isolated points with no limit-point in $\mathfrak{S}'_0$, which will be eigen-values in the ordinary sense for $I - A X_0$ and $I - X_0 A$.

20. What I wish to prove here is then that if X_λ is defined by (19. 1) then X_λ provides a relative inverse of T_λ for all $\lambda \in \mathfrak{S}'_0$ with the exception of eigen-values of $I - A X_0, I - X_0 A$; these two operator-functions will have the same eigen-values. It has therefore to be proved that for such λ-values

(20. 1-2) $$T_\lambda X_\lambda T_\lambda = T_\lambda, \quad X_\lambda T_\lambda X_\lambda = X_\lambda.$$

Before proving this it is necessary to clarify the relationship between $\mathfrak{S}_0$ and $\mathfrak{S}'_0$. Assuming, as I do, that at least one of m, n is finite, then it can be asserted that $\mathfrak{S}'_0 \subseteq \mathfrak{S}_0$. For let $\lambda \in \mathfrak{S}'_0$, so that $I - X_0 A$ is relatively regular and $\alpha(I - X_0 A) = \beta(I - X_0 A)$, both numbers being finite. Assume for definiteness that $m < \infty$, so that P_{10} is finite-dimensional. We have the equation $X_0 T = X_0(T_0 - A) = (I - X_0 A) - P_{10}$. An application of Theorem 10 then shows that $X_0 T$ is relatively regular and that $\alpha(X_0 T_\lambda) < \infty$. It now follows by Theorem 3 that T_λ is relatively regular and that $\alpha(T_\lambda) < \infty$. Thus $\mathfrak{S}'_0$ is a connected region throughout which T_λ is relatively regular with $\alpha(T_\lambda) < \infty$, and furthermore $\mathfrak{S}'_0$ contains λ_0. But $\mathfrak{S}_0$ is the maximal such region containing λ_0, so that $\mathfrak{S}'_0 \subseteq \mathfrak{S}_0$, as was to be proved. The argument is of course similar if only $n < \infty$.

The position becomes simpler if both m and n are finite, for then $\mathfrak{S}'_0$ and $\mathfrak{S}_0$ coincide. In this case, if $\lambda \in \mathfrak{S}_0$, X_0 and T_λ will both satisfy conditions (A_2) and (B_3) of § 2, so that by Theorem 4 of this paper (or by Theorem 2 of [5]) $X_0 T_\lambda$ will satisfy the same conditions, and hence also $(I - X_0 A)$, by Theorem 10. It now follows that $\mathfrak{S}_0$ is a connected region, containing λ_0, in which $\alpha(I - X_0 A)$ and $\beta(I - X_0 A)$ are finite and $(I - X_0 A)$ is relatively regular, so that $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}'_0$, which together with the previous result shows that the two regions coincide. It does not of course follow that the generalised eigen-values in the two regions coincide.

Reverting to the previous case, let us only assume that $m < \infty$, and let λ be a point of $\mathfrak{S}'_0$ which is not a singularity of $(I - X_0 A)^{-1}, (I - A X_0)^{-1}$. I wish under these assumptions to justify (20. 1-2). Of these, (20. 2) is trivial since

$$X_\lambda - X_\lambda T_\lambda X_\lambda = X_\lambda(I - T_\lambda X_\lambda) = (I - X_0 A)^{-1} X_0 P_{20} (I - A X_0)^{-1},$$

by (19. 1) and (19. 3), and this vanishes since $X_0 P_{20} = X_0(I - T_0 X_0) = 0$. Considering now (20. 1) we have by (19. 2)

(20. 3) $$T_\lambda(I - X_\lambda T_\lambda) = T_\lambda(I - X_0 A)^{-1} P_{10},$$

and it has to be proved that the right-hand side vanishes. Consider the set of $\varphi \in \mathfrak{R}$ such that $T\varphi = 0$. For such φ, by (19.2) we have $\varphi = (I - X_0 A)^{-1} P_{10} \varphi$, so that the linear manifold of such φ is contained in the range of the (projection) operator $(I - X_0 A)^{-1} P_{10}$. But this operator has the same dimensionality as P_{10}, which is by hypothesis $m < \infty$. Furthermore by the hypotheses the set of such φ is of dimensionality not less than m, the minimum value of $\alpha(T_\lambda)$ throughout the region $\mathfrak{S}_0$. It follows that the set of such φ is of dimensionality precisely m, and that the set coincide with the range of $(I - X_0 A)^{-1} P_{10}$, so that the right-hand side of (20. 3) vanishes.

Summing up we have proved that if $\lambda \in \mathfrak{S}'_0$ is not an eigen-value of $(I - X_0 A)$, $(I - A X_0)$, then it is not a generalised eigen-value of T_λ, and furthermore the relative inverse of T_λ is given by (19. 1). It follows from this that for such λ the projection operators characterising the right and left null-manifolds of T_λ are given by (19. 2-3).

The argument is of course similar if instead of $m < \infty$ we assume that $n < \infty$.

While we have proved that the generalised eigen-values of T_λ are included in the (in this case ordinary) eigen-values of either of $(I - X_0 A)$, $(I - A X_0)$, the possibility remains that the latter two operators might have eigen-values which were not generalised eigen-values of T_λ. If m and n are not both zero the relative inverse is of course not unique, which suggests the question of whether in this case X_0 can be chosen so as to make the two sets of singularities identical. If $m = n = 0$, so that T_0 has an inverse which is also the relative inverse, it is readily seen that the two sets are the same.

21. I conclude this paper by illustrating some of these concepts in a simple case in which only one of the indices α, β is finite [7]).

Consider the space of sequences of complex numbers

$$f = (f_0, f_1, \dots)$$

with the norm, say, $\|f\| = \sum_0^\infty |f_n|$, and the bounded linear transformation

$$Tf = (f_0, 0, f_1, 0, f_2, 0, \dots) \tag{21. 1}$$

for which obviously $\alpha(T) = 0$, $\beta(T) = \infty$. A relative inverse, in fact in this case a left inverse, is given by

$$Xf = (f_0, f_2, f_4, \dots), \tag{21. 2}$$

so that $XT = I$, $TXT = T$, $XTX = X$.

I now consider two examples of spectral theory involving this operator. Take first $T_\lambda = T - \lambda I$, where T is given by (21.1). Since $\|T\| = 1$ it is clear that T_λ has an inverse for $|\lambda| > 1$. We have further, if X is given by (21.2), $XT_\lambda = I - \lambda X$, and since $\|X\| = 1$ it follows that for $|\lambda| < 1$ a left inverse, and so a relative inverse, of T_λ is given by $(I - \lambda X)^{-1} X$. Thus the whole λ-plane is divided up into the following three regions: (i) the region $|\lambda| > 1$, which will be of type $\mathfrak{S}(0, 0, B_3)$, (ii) the region $|\lambda| < 1$, of type $\mathfrak{S}(0, \infty, B_3)$, (iii) the region $|\lambda| = 1$, which does not lie in the region I termed $\mathfrak{S}_0(B_3)$, where T_λ is relatively regular and at least one of $\alpha(T_\lambda), \beta(T_\lambda)$ is finite. In this case there are no eigen-values, either generalised or ordinary, though these may be introduced by making slight modifications to the operator T.

---

[7]) A similar example in which α and β are both finite but different has been briefly considered by Beurling [16], p. 242, Hamburger [9], p. 504.

As a second example I take $T_\lambda = T - \lambda A$, where T is given as before by (21.1), and A is given by

$$Af = (f_0, f_0, f_1, f_1, f_2, \ldots).$$

We have then

$$T_\lambda f = (f_0(1-\lambda), -\lambda f_0, (1-\lambda)f_1, -\lambda f_1, \ldots),$$

from which it is clear that a "relative resolvent" X_λ, which in this case is a left inverse and is independent of λ, is given by

$$X_\lambda f = (f_0 - f_1, f_2 - f_3, \ldots).$$

It follows that in this case the whole λ-plane is a region of the form $\mathfrak{S}(0, \infty, B_3)$, and again there are no generalised eigen-values.

Apropos of the remarks at the end of § 20, I now show that for the last example the "relative resolvent" may be chosen so that it has singularities which are not generalised eigen-values of T_λ. We take the left inverse of T given by

$$X'f = (f_0 - a_0 f_1, f_2 - a_1 f_3, \ldots),$$

where the a_r form any bounded sequence of complex numbers. We have then $X'T_\lambda = X'(T-\lambda A) = I - \lambda X'A$, and the corresponding relative resolvent is given by $(I-\lambda X'A)^{-1}X'$, provided that $(I-\lambda X'A)$ has an inverse. However we have

$$X'Af = ((1-a_0)f_0, (1-a_1)f_1, \ldots),$$

so that the singularities of $(I-\lambda X'A)^{-1}$ will be at the points $\lambda = (1-a_r)^{-1}$, $(r = 0, 1, \ldots)$. We may of course choose the a_r so as to make these singularities dense along a closed curve, or dense inside a region, and we shall then have cases in which the connected region in which $(I-\lambda X'A)^{-1}$ exists, denoted in the notation of § 20 by $\mathfrak{S}_0'$, is a proper sub-region of $\mathfrak{S}_0$, the connected region in which T_λ is relatively regular with at least one of $\alpha(T_\lambda)$, $\beta(T_\lambda)$ finite; this, it will be recalled, was shown to be impossible in cases in which $\alpha(T_\lambda)$, $\beta(T_\lambda)$ are both finite.

UNIVERSITY COLLEGE,
IBADAN, NIGERIA.

References.

[1] F. V. ATKINSON, A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 53—60.

[2] A. F. RUSTON, Direct products of Banach spaces and linear functional equations, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **1** (1951), 327—384.

[3] F. NOETHER, Über eine Klasse von singulären Integralgleichungen, *Math. Annalen*, **82** (1921), 42—63.

[4] З. И. Халилов, Линейные сингулярные уравнения в нормированном кольце, Известия Акад. Наук СССР, **13** (1949), 163—176.

[5] Ф. В. Аткинсон, Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. Сборник, **28** **(70)** (1951), 3—14.

[6] И. Ц. Гохберг, О линейных уравнениях в пространстве Гильберта, Доклады Акад. Наук СССР, **76** (1951), 9—12.

[7] С. Г. Михлин, Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений, Матем. Сборник, **3** **(45)**, (1938), 121—141.

[8] И. Ц. Гохберг, Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям, Успехи Матем. Наук, **7** **(48)** (1952), 149—156.

[9] H. L. Hamburger, Five notes on a generalization of quasi-nilpotent transformations in Hilbert space, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **1** (1951), 494—512.

[10] I. Kaplansky, Regular Banach algebras, *Journal Indian Math. Soc.*, *(N. S.)* **12** (1948), 57—62.

[11] F. Hausdorff, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *Journal für d. reine u. angew. Math.*, **167** (1932), 294—311.

[12] М. Г. Крейн—М. А. Красносельский, Устойчивость индекса неограниченного оператора, Матем. Сборник, **30** **(72)** (1952), 219—224.

[13] Sz.-Nagy, B., On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 49—52.

[14] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сборник Труд. Инст. Матем. УССР, **11** (1948), 97—112.

[15] E. Hille, Functional Analysis and Semi-groups, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, Vol. 31 (New York, 1948).

[16] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1948), 239—255.

(Received March 6, 1953.)

Beweis der Hauptformel der hyperbolischen Trigonometrie unabhängig von der Stetigkeit.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Die Hauptformel von J. BOLYAI[1]) für den hyperbolischen Raum:

$$A = \operatorname{cgt}\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

drückt das Verhältnis $A = s':s$ zweier konzentrischen Grenzkreisbogen $s = \widehat{PR} < \widehat{P'R'} = s'$ (zwischen denselben Achsen $PP' \succ RR'$ und im Abstand $\overline{PP'} = \overline{RR'} = a$) durch den Parallelwinkel α aus, der diesem Abstand a entspricht. Diese Formel hat auch dann einen Sinn, wenn man bei der Begründung der hyperbolischen Geometrie auf die Stetigkeitsaxiome verzichtet und die Existenz der hyperbolischen Parallelen als Axiom voraussetzt, wie es D. HILBERT[2]) getan hat. Der von J. BOLYAI[3]) bzw. N. I. LOBATSCHEFSKIJ[4]) entdeckte klassische Satz, laut welchem auf der Grenzkugel die euklidische ebene Geometrie gilt, wenn die Grenzkreise Geraden genannt werden, bleibt nämlich auch in diesem Falle bestehen (abgesehen von den Stetigkeitsaxiomen), und man kann deshalb die Hilbertsche *Streckenrechnung*[5]) auf der Grenzkugel anwenden, auf diese Weise mit den Grenzkreisbogen nach den gewöhnlichlen Gesetzen rechnen, und die Winkelfunktionen als Grenzkreisbogenverhältnisse euklidisch erklären[6]).

---

[1]) J. BOLYAI, *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 29.; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen.* II (Leipzig und Berlin, 1913), S. 197.

[2]) D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen,* 57 (1903), 137—150, besonders S. 139—140, oder *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III, S. 159—177, besonders S. 162.

[3]) J. BOLYAI, a. a. O.[1]), § 21; siehe P. STÄCKEL, a. a. O. S. 192—193.

[4]) Siehe F ENGEL, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, etc.,* Erster Teil (Leipzig, 1898), S. 12.

[5]) D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl., §§ 15—16.

[6]) Die so erklärten Winkelfunktionen $\sin x$ und $\cos x$ nehmen jeden Wert (d. h. jeden Grenzkreisbogen) an, der seinem Betrage nach $\leqq 1$ ist. Geht nämlich ein Grenzkreis auf der Grenzkugel durch einen inneren Punkt eines Kreises, so wird dieser Kreis von ihm in

Unsere Absicht ist die Formel (1), oder ausführlicher geschrieben

$$(1^*) \qquad \frac{s'}{s} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

auf dieser von der Stetigkeit unabhängigen Grundlage zu beweisen. Als Vorbereitung führen wir folgendes an.

Bezeichnet $p(a)$ den Grenzkreisbogen von der Höhe a und α den Parallelwinkel, der dem Abstand a gehört (Fig. 1), so zeigt eine leichte Überlegung[7]), daß

$$(2) \qquad p(a)\operatorname{tg}\alpha = S$$

von a unabhängig, d. h. eine Weltkonstante ist[8]). Der Höhe a_0 dieses Grenzkreisbogens S entspricht deshalb die Hälfte des rechten Winkels als Parallelwinkel (Fig. 2). Auf Grund dieses Satzes (2) ergeben sich sogleich[9]) die

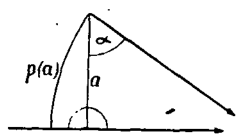


Fig. 1.

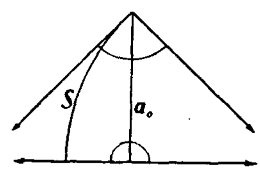


Fig. 2.

bekannten Lobatschefskijschen Grundformeln der hyperbolischen *Winkeltrigonometrie* des rechtwinkligen Dreiecks[10]). Aus diesen können sodann die vier Grundformeln der Winkeltrigonometrie des allgemeinen Dreiecks[11]) in einfacher Weise gewonnen werden[12]). Sind λ, μ, ν die Winkel des Dreiecks und α, β, γ den gegenüberliegenden Seiten a, b, c entsprechende Parallelwinkel, so lautet

zwei Punkten geschnitten, wie man sich davon leicht überzeugen kann, ohne die Stetigkeitsaxiome annehmen zu müssen. Das bedeutet mit anderen Worten, daß *in der euklidischen ebenen Geometrie der Grenzkugel (unabhängig von der Stetigkeit) auch das Kreisaxiom erfüllt ist:* hat eine Gerade einen Punkt im Innern eines Kreises, so schneidet sie den Kreis in zwei Punkten. In der euklidischen Geometrie ist das ein weiteres Axiom, wenn man die Stetigkeitsaxiome fallen läßt. Vgl. z. B. H. G. Forder, *The Foundations of Euclidean Geometry* (Cambridge, 1927), S. 134, Axiom Q_1. Die erwähnte Tatsache wird übrigens im folgenden nicht benutzt.

7) Paul Szász, Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie mit Hilfe der Grenzkugel. (Erscheint demnächst in den *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae.)* Einen anderen Beweis hat vorher V. F. Kagan gegeben, siehe die russische Ausgabe der *Geometrischen Untersuchungen etc.* von N. I. Lobatschefskij (Moskau-Leningrad, 1945), S. 130—131.

8) Der Satz ist unter Annahme der Stetigkeit (und letzten Endes lückenhaft) schon bei J. Bolyai, a. a. O.[1]), § 30, bewiesen.

9) Siehe z. B. Paul Szász a. a. O.[7]), besonders § 1.

10) Siehe F. Engel, a. a. O.[4]) S. 20, Formel (14).

11) Siehe F. Engel, a. a. O.[4]) S. 21, Formel (17), für den Beweis ebenda S. 223—225.

12) Siehe z. B. Paul Szász, A hiperbolikus trigonometriáról, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 48 (1941), S. 401—409, besonders § 1.

der *Sinussatz*

(3) $$\sin \lambda : \sin \mu : \sin \nu = \operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta : \operatorname{ctg} \gamma,$$

während nach dem *Kotangentensatz*

(4) $$\sin \beta \sin \nu \operatorname{ctg} \lambda = -\cos \nu + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

ist.

Nun gehen wir zum Beweis der Formel (1*) über. Es seien die Höhen der Bogen $\widehat{PR} = s$, $\widehat{P'R'} = s'$ der Reihe nach $\overline{PQ} = b$, $\overline{P'Q'} = b'$, die entsprechenden Parallelwinkel β, β' (Fig. 3). Es werde ferner $QP' = c$, $\sphericalangle PQP' = \lambda$, $\sphericalangle PP'Q = \mu$, $\sphericalangle P'PQ = \nu$ gesetzt. Im Sinne von (2) is

(5) $$\frac{s'}{s} = \frac{p(b')}{p(b)} = \frac{\operatorname{ctg} \beta'}{\operatorname{ctg} \beta}.$$

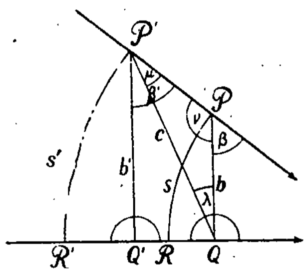


Fig. 3.

Nach (3) ist aber im Dreieck $QP'P$ (da doch Winkel ν das Supplement des Parallelwinkels β ist, also $\sin \nu = \sin \beta$ ausfällt)

$$\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \lambda},$$

während im rechtwinkligen Dreieck $QP'Q$ (da ja $\sphericalangle P'QQ'$ das Komplement von λ ist)

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta'}{\operatorname{ctg} \gamma} = \cos \lambda.$$

Durch Multiplikation der letzten zwei Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta'}{\operatorname{ctg} \alpha} = \sin \beta \operatorname{ctg} \lambda.$$

Auf Grund von (4) (wobei jetzt $\sin \nu = \sin \beta$, $\cos \nu = -\cos \beta$ ist) nimmt diese Formel die Gestalt

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta'}{\operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} \beta + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\cos \alpha}$$

an. Also ist

$$\operatorname{ctg} \beta' = \operatorname{ctg} \beta \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

woraus mit Rücksicht auf (5) die beweisende Formel (1*) folgt.

Entsprechen den Abständen $a_1, a_2, a = a_1 + a_2$ der Reihe nach die Parallelwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$, so hat offenbar der eben bewiesene Satz (1*) die bekannte Funktionalgleichung von N. I. LOBATSCHEFSKIJ [13])

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2}.$$

zur Folge. [14])

(Eingegangen am 6. März 1953.)

---

[13]) Siehe F. ENGEL, a. a. O.[4]) S. 20, Formel (11).

[14]) Aus dieser Funktionalgleichung ergibt sich bei Annahme der Stetigkeitsaxiome die klassische Formel $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{a}{k}}$ (vgl. J. BOLYAI, a. a. O.[1]), §§ 24, 29, resp. F. ENGEL, a. a. O.[4]) S. 20, Formel (12). Hierbei bedeutet k mit Rücksicht auf die obige Formel (1*) denjenigen Abstand, dem das Grenzkreisbogenverhältnis $K = e$ entspricht. Für die bekannte Tatsache, daß k gleich der Bogenlänge von S ist (F. ENGEL, Zur nichteuklidischen Geometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig.* Math.-phys. Klasse, **50** (1898), S. 181—191, besonders S. 190), haben wir einen strengen Beweis gegeben, siehe PAUL SZÁSZ, a. a. O.[7]), § 2.

On a theorem of Kulikov and Dieudonné.

By A. KERTÉSZ in Debrecen.

§ 1. Introduction.

KULIKOV was the first to give a necessary and sufficient condition for an abelian p-group of arbitrary power to be a direct sum of cyclic groups [5].[1]) As a generalization of this criterion, DIEUDONNÉ obtained recently the following result [1]: Let G be an abelian p-group and B a subgroup of G such that G/B is a direct sum of cyclic groups. *In order that G be a direct sum of cyclic groups, it is necessary and sufficient that B be the union of* a countable ascending sequence of subgroups with elements of bounded height (relative to G). The special case where $B=G$ is the result mentioned of KULIKOV.

In a previous paper [2] I have given a criterion of different kind for the decomposibility of an abelian p-group into the direct sum of cyclic groups, from which KULIKOV's criterion can easily be deduced. In a more recent paper I generalized this result, obtaining thus a necessary and sufficient condition for an abelian p-group of arbitrary power to be fully decomposable [3]. A group is said to be fully decomposable if it can be represented as a direct sum of directly indecomposable groups. It is known that among the abelian torsion groups only the groups $C(p^m)$ $(0 \leqq m \leqq \infty)$ — i. e. the cyclic and quasicyclic p-groups — are directly indecomposable [4], [7].[2])

In what follows I shall prove a theorem (see Theorem 1 in § 2) which is a common generalization of DIEUDONNÉ's theorem and of my results mentioned above. As special cases of this theorem, several other theorems of the theory of groups can be obtained (see § 3). In § 4 we also prove that this theorem cannot be sharpened.

In his paper DIEUDONNÉ adds several interesting remarks to his theorem. E. g. he mentions that if B and G/B are direct sum of cyclic groups, the same does not hold in general for G. Moreover, by an ingenious counter-example he also shows that it is not sufficient to require the former con-

[1]) The numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of the paper

[2]) For notation and terminology see the end of this §.

ditions, even if G contains no elements of infinite height. Our theorem answers also to the question of what additional requirement must be fulfilled in order that G be a direct sum of cyclic groups. This requirement is the existence of a *principal system* of elements in B (relative to G).

Since an abelian torsion group is the direct sum of uniquely determined p-groups, our result can be extended in an obvious way to torsion groups of arbitrary power.

The notations and the terminology used are the following. By capital letters we denote groups or some systems of group elements, by the letters $x, a, b, \ldots, g$ group elements, while the other small Latin letters are reserved for rational integers, in particular p for a prime number. The Greek letter ν may range over an arbitrary not necessarily ordered set of indices. In what follows, by a group we shall mean always an additively written abelian group with more than one element. A subgroup generated by the elements $a, b, \ldots$ of a group is denoted by $\{a, b, \ldots\}$. A group every element of which is of finite order, is called a *torsion group.* It is well known that a torsion group may be represented as the direct sum of its uniquely determined *primary components,* each of which is a p-group, i. e. a group containing only elements of p-power order. We denote the order of a group element a by $O(a)$. The *height* in G of an element a of the p-group G is defined as follows. An element $a \neq 0$ of the p-group G is said to have the height $h = H(a)$ if the equation $p^n x = a$ is solvable in G for $n \leqq h$, but not for $n > h$. We define $H(a) = \infty$ if $p^n x = a$ has a solution $x \in G$ for each natural number n. We emphasize that $H(a)$ is defined only for $a \neq 0$.[3]) An important role is played in our investigations by the concepts of elements of inner resp. outer infinite height. We say that an element a with $H(a) = \infty$ of the p-group G is an *element of inner infinite height* if $p^t x = a$ has a solution $x \in G$ of infinite height for each natural number t. In the contrary case, when there exists a t for which $p^t x = a$ admits only solutions $x \in G$ of finite height, we call a an *element of outer infinite height.* We remark that if G is the direct sum of its subgroups $B_1, B_2, \ldots$ and $g = b_1 + b_2 \cdots (b_\nu \in B_\nu)$, then evidently $H(g) \leqq H(b_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ holds.

The elements $a_1, \ldots, a_n$ of the group G are called *independent* if $r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n = 0$ implies $r_1 a_1 = \cdots = r_n a_n = 0$. An arbitrary set S of elements of G is independent, if every finite subset of S is independent. The independence so defined is therefore a property of finite character and consequently, by virtue of ZORN's lemma (or the equivalent lemma of TUKEY), every subset R of G contains a *maximal independent system* S. If $R = G$, we call S a maximal independent system of G. We denote by $C(p^m)$ in the

3) By the *height* of an element g of G we always mean the number $H(g)$ defined above, i. e. the height refers always to the whole group G, even when an element is, for the moment, considered as an element of some subgroup of G.

case $m < \infty$ the cyclic group of order p^m, and in the case $m = \infty$ the group of type (p^∞) or *quasicyclic group,* i. e. the group $\{a_1, a_2, \ldots\}$ defined by the relations

(1) $$a_1 \neq 0,\ pa_1 = 0,\ pa_2 = a_1, \ldots .$$

§ 2. Fully decomposable abelian p-groups.

In formulating the Theorem 1 below, we shall make use of the following

Definition. A maximal independent system P of a subgroup B of the abelian p-group G is called a *principal system* of B (relative to G), if no element of P can be exchanged for an element of a greater height of B without violating the independence of the system[3])[4]). In particular, in the case $B = G$ the system P is called a principal system of G.

Remarks. One can see that a principal system P (relative to G) of the subgroup B is subject to a condition considerably stronger than the one determining a principal system of B (no respect being paid to the imbedding of B into the group G). By a principal system we therefore shall always mean one relative to G, even if this is not explicitely stated.

Each element of finite height of a principal system P is of order p, for an element $a \in P$ of order p^k $(k > 1)$ would be exchangeable for the element $p^{k-1}a$ of greater height. On the other hand, an element of infinite height can obviously be exchanged for an element of order p. Consequently, in what follows we may always assume that a *principal system contains only elements of order p.*

Now we state the following

Theorem 1. *An abelian p-group G is fully decomposable — i. e. it decomposes into the direct sum of cyclic and quasicyclic groups — if and only if*

1) *G contains no elements of outer infinite height,*

2) *there exists a subgroup B of G having a principal system (relative to G), and*

3) *G/B is a direct sum of cyclic groups.*

Proof. The necessity of conditions 1), 2) and 3) can easily be verified. In fact, let us suppose that G is the direct sum of cyclic and quasicyclic groups C_ν, and let be $B = G$. Then 1) and 3) obviously hold.

In order to prove the validity of 2), we choose an element a_ν of order p from each direct summand C_ν of $B = G$. We show that the set of all a_ν's is a principal system P of G. Indeed, P is a maximal independent system

---

[4]) Of course, elements of infinite height are considered to be of greater height than any element of finite height.

in G; moreover, for an arbitrary element $b \in G$ of order p^k a relation of the form

$$p^{k-1} b = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$$

holds (with a suitable notation for the elements of P), showing that $a_1, \ldots, a_n$ are the only elements of P one of which can be replaced by b without violating the independence of the system P. Since $H(b) \leqq H(p^{k-1} b) \leqq H(a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, no element of P can be exchanged for an element of a greater height of G.

In order to prove the sufficiency of conditions 1)—3) let us consider an arbitrary abelian p-group G without elements of outer infinite height. Moreover, let B be a subgroup of G containing a principal system $P = (a_\nu)$ (relative to G) and suppose that $G/B = \bar{G}$ is a direct sum of cyclic groups:

$$\bar{G} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$$

the $\bar{A}_k$'s being direct sums of groups $C(p^k)$ (the case $\bar{A}_k = 0$ not excluded). Let us denote with D_k the subgroup of G, the elements of which are exactly those belonging to the cosets relative to B of the group $\bar{A}_1 + \cdots + \bar{A}_k$. By D_0 we mean $D_0 = B$. We state that *for the height*[3]) *of an arbitrary element g_k not contained in B of the group D_k an estimate $H(g_k) \leqq k-1$ holds for each* $k > 0$. For if $g_k \in D_k$, $g_k \notin B$, then $\bar{g}_k \neq 0$ where by $\bar{g}_k$ we denote the coset of G (relative to B) containing the element g_k. Obviously the equation $p^n \bar{x} = \bar{g}_k$ can be solvable in $\bar{G} = G/B$ only with $n \leqq k-1$, and consequently the same holds for the equation $p^n x = g_k$ in G.

Now we extend the given principal system $P = P_0$ of B to a maximal independent system P^* of G, as follows. We adjoin a maximal independent system of elements $\in D_1$ of order p (and of height 0) such that the resulting system P_1 shall be a maximal independent system of D_1. In an analogous way we extend P_1 to a maximal independent system P_2 of D_2 by adjoining a maximal system of elements $\in D_2$ of order p and of height 1 ("1-layer"), then a maximal system of elements $\in D_2$ of order p and of height 0 ("0-layer"). We proceed likewise in constructing successively the systems $P_3, P_4, \ldots$, each P_n being a maximal independent system of D_n. Clearly *the union P^* of all systems $P = P_0, P_1, P_2, \ldots$ is a maximal independent system of G, the elements of wich are all of order p.*

Now we are going to show that the group G is fully decomposable. If a_ν is an element of infinite height of P^*, then from 1) we infer the existence of an infinite system of elements $a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)}, \ldots$ in G, such that

$$p a_\nu^{(1)} = a_\nu,\ p a_\nu^{(2)} = a_\nu^{(1)}, \ldots$$

hold. Then (see (1))

$$\{a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)}, \ldots\} = C_\nu = C_\nu(p^{m_\nu}) \qquad (m_\nu = \infty)$$

is a quasicyclic subgroup of G containing a_ν. On the other hand, if for an element $a_\nu \in P^*$

$$H(a_\nu) = h_\nu < \infty$$

holds, then we determine an element $c_\nu \in G$ such that

(2) $$p^{h_\nu} c_\nu = a_\nu.$$

In this case let

$$\{c_\nu\} = C_\nu = C_\nu(p^{m_\nu}) \qquad (m_\nu = h_\nu + 1).$$

Now we state that G is the direct sum of the groups C_ν. As a matter of fact, the independence of the system P^* guarantees that the subgroup K of G generated by the C_ν's is the *direct sum* of these groups:

$$K = \sum C_\nu.$$

Therefore only the fact $K = G$ remains to be proved.

Before proving this, we make the following remark: *A relation*

(3) $$pg = d_1 + \cdots + d_m \qquad (g \in G, d_i \in C_i)$$

implies $d_i = pd_i'$ $(d_i' \in C_i, i = 1, \ldots, m)$. For let us suppose the contrary. Then there exists a relation

(4) $$pg = r_1 c_1 + \cdots + r_k c_k \qquad (g \in G)$$

for which $p \nmid r_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. In fact, each d_i in the right member of (3) which can be expressed in the form $d_i = pd_i'$ $(d_i' \in C_i)$ — and for a quasicyclic C_i this is always the case — disappears by introducing $g' = g - d_i'$. Now, among the elements $a_1, \ldots, a_k$ corresponding to the elements $c_1, \ldots, c_k$ in (4) let a_1 be one of maximal height;

$$h_1 = H(a_1) \geqq H(a_j) \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Thus, by virtue of (2), (4) implies

$$a' = p^{h_1+1} g = r_1 a_1 + \cdots.$$

This means that $H(a') > H(a_1)$ which contradicts the following statement: *if* $a_1, \ldots, a_j$ *are arbitrary element of* P^* *and*

(5) $$a' = s_1 a_1 + \cdots + s_j a_j$$

then

(6) $$H(a') \leqq H(a_i) \qquad (i = 1, \ldots, j).$$

This can be verified as follows. We may assume that the elements $a_1, \ldots, a_j$ are so ordered in (5) that

(7) $$a_i \in D_m \text{ implies } a_{i-t} \in D_m \qquad (t = 1, \ldots, i-1).$$

If (6) is not true, then let i be the maximal index among $1, \ldots, j$ such that

(8) $$H(a') > H(a_i).$$

Hence

(9) $$H(a_{i+u}) \geqq H(a') > H(a_i) \qquad (u = 1, \ldots, j-i).$$

Consequently, by (5) and (7),

$$g' = a' - (s_{i+1} a_{i+1} + \cdots + s_j a_j) = s_1 a_1 + \cdots + s_i a_i \in D_m$$

(contained in D_m together with a_i) with $H(g') > H(a_i)$ (see (8), (9)) g' may replace the element $a_i \in D_m$ without violating the independence of P_m, which contradicts the construction of the system P_m (more exactly the maximality of the "$H(g')$-layer" of P_m) in the case $m > 0$, resp. the definition of $P = P_0$ in the case $m = 0$.[5]) This completes the proof of our previous remark.

Now we can easily prove that $K = G$. Suppose that K is a proper subgroup of G. Then there exists an element $g \in G$ such that

$$g \notin K, \quad pg \in K \tag{10}$$

i. e. a relation (3) holds. Thus $d_i = pd_i'$ $(d_i' \in C_i,\ i = 1, \ldots, m)$ and so we have

$$p(g - d_1' - \cdots - d_m') = 0.$$

Therefore

$$g' = g - d_1' - \cdots - d_m' \tag{11}$$

— as an element $\neq 0$, see (10) — is an element of order p, and consequently, by the maximal property of the system P^*, g' is a linear combination of some a_ν's, i. e. $g' \in K$. Hence (11) implies $g \in K$ which contradicts (10), completing the proof of Theorem 1.

§ 3. Applications.

From Theorem 1 easily follow several well-known theorems. These we obtain by specialization in two directions: putting $B = G$, and, on the other hand, requiring that G shall not contain elements of infinite height.

In case $B = G$ one obtains from Theorem 1 the following result of mine [3]:

Theorem 2. *An abelian p-group G is fully decomposable if and only if G contains no element of outer infinite height, and there exists a principal system of elements in G.*

Supposing that G contains no elements of infinite height, one obtains from Theorem 2 a former result of mine, stating when an abelian p-group is the direct sum of cyclic groups [2]:

Theorem 3. *An abelian p-group G containing no element of infinite height is a direct sum of cyclic groups if and only if there exists a principal system of elements in G.*

For corollaries of Theorems 2 and 3 see [2] and [3].

---

[5]) We should like to call attention to the fact that in the case $m = 0$ the element g' lies, by (7), in $D_0 = B$.

In the special case if B contains no element of infinite height, from Theorem 1 we obtain

Theorem 4. *An abelian p-group G is a direct sum of cyclic groups if and only if there exists in G a subgroup B without elements of infinite height*[9]) *containing a principal system (relative to G), and G/B is a direct sum of cyclic groups.*

Remark. Dieudonné gives an ingenious example of an abelian p-group without elements of infinite height, which has a subgroup B such that both B and G/B are direct sums of cyclic groups without G itself being a direct sum of cyclic groups. Theorem 4 states the additional requirement which must be fulfilled in order that no such situation shall occur.

From Theorem 4 there follows Dieudonné's theorem:

Theorem 5. *Let G be an abelian p-group and B a subgroup of G such that G/B is a direct sum of cyclic groups. Then G is a direct sum of cyclic groups if and only if B is the union of a countable ascending sequence*

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

of subgroups such that each A_n contains an element of maximal height $h_n < \infty$.[8])

The necessity of the conditions in Theorem 5 is evident. In order to prove their sufficiency, we remark that by Theorem 4 it suffices to construct a principal system P of elements in B (relative to G) as follows. Choose a maximal independent system of elements $\in A_1$ of height h_1, adjoin a maximal system of elements $\in A_1$ of height h_1-1, and so on, so that the resulting system P_1 shall be a maximal independent system of A_1.[9]) In an analogous way we extend P_1 to a maximal independent system P_2 of A_2. We proceed likewise in constructing successively the systems $P_3, P_4, \ldots$ each P_n being a maximal independent system of A_n. No we assert that the union P of all systems $P_1, P_2, \ldots$ is a principal system of B (relative to G). Clearly, *P is a maximal independent system of B, and the elements of P are all of order p.* Hence for an arbitrary element g of order p^k of G a representation

$$a' = p^{k-1}g = s_1a_1 + \cdots + s_ja_j \tag{12}$$

holds, $a_1, \ldots, a_j$ being suitable elements of P. This equation shows that $a_1, \ldots, a_j$ are the only elements of P one of which may be replaced by g without violating the independence of the system P. On the other hand, we have seen in § 2 that equation (12) implies the validity of (6), and, a fortiori, the validity of

$$H(g) \leqq H(a_i) \qquad (i = 1, \ldots, j).$$

This shows that P is a principal system of B (relative to G) completing so the proof of Theorem 5.

The special case of Theorem 5 where $B = G$ is a theorem of KULIKOV:

Theorem 6. *An abelian p-group G is the direct sum of cyclic groups if and only if G is the union of a countable ascending chain*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subset A_n \subseteq \cdots$$

of its subgroups such that each A_n *contains an element of maximal height* $h_n < \infty$.[3])

§ 4. Concluding remarks.

Finally we show that our Theorem 1 is not capable of further sharpening.

First we remark that condition 1) in Theorem 1 cannot be omitted. In order to show this consider the following group $G = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ (Prüfer [6]) defined by the relations

$$a_0 \neq 0, \ \ pa_0 = 0, \ \ a_0 = pa_1 = p^2a_2 = \cdots = p^n a_n = \cdots.$$

This group is not fully decomposable since it contains an element of outer infinite height, viz. a_0. Conditions 2) and 3) of Theorem 1, however, hold for this group G, for it is not hard to see that the system

$$a_0, \ a_1 - pa_2, \ pa_2 - p^2a_3, \ \dots, \ p^{n-1}a_n - p^n a_{n+1}, \ \dots$$

is a principal system of $B = G$.

Next we show that condition 2) of Theorem 1 cannot be omitted. Consider the complete direct sum of the cyclic groups $\{b_n\} = C(p^n)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, i. e. the set of all "vectors"

$$c = \langle m_1 b_1, m_2 b_2, \dots, m_n b_n, \dots \rangle$$

which are added component-wise. The elements of finite order of this group form an abelian p-group G wich contains no element of infinite height. Recently T. SZELE has shown in a very simple way that this group G cannot be decomposed into a direct sum of cyclic groups [8]. Therefore G is not fully decomposable, although it fulfils condition 3) of Theorem 1 with $B = G$.

Finally we show that condition 3) of Theorem 1 cannot be omitted. Moreover we are going to prove that condition 3) cannot be replaced by the weaker requirement: G/B is a direct sum of cyclic and quasicyclic groups. For there exists an abelian p-group G without elements of infinite height containing a subgroup B with a principal system (relative to G) such that G/B is fully decomposable, although G itself is not fully decomposable. Such a group is e. g. the group G mentioned in the preceding paragraph. Since this group is not fully decomposable and it contains no element of infinite height, we have only to show that G possesses a subgroup B such that G/B is fully decomposable and there exists in B a principal system (relative to G). This can easily be proved with the aid of on important theorem of KULIKOV, which asserts that an arbitrary abelian p-group contains a subgroup B such that B is a direct sum of cyclic groups, G/B is a direct sum of quasicyclic groups and the height of each element of B relative to B is identical with that relative to G [5]. Now it is not hard to see that this last property of the subgroup B implies that it contains a principal system relative to G. For let B be the direct sum of the cyclic groups $\{c_\nu\}$ where c_ν is an element of order p^{k_ν}. We show that the set P of all elements $a_\nu = p^{k_\nu - 1}c_\nu$ is a principal system of B (relative to G). Clearly P is a maximal independent system in B. Moreover for an arbitrary element $g \in B$ of order p^k a relation

$$p^{k-1}g = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$$

holds (with a suitable notation for the elements of P), showing that $a_1, \ldots, a_n$ are the only elements of P one of which can be replaced by g without violating the independence of P. Since

$$H(g) \leqq H(p^{k-1}g) \leqq H(a_i) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

where $H(x)$ denotes the common height of an element $x \in B$ relative to B and relative to G, no element of P can be exchanged for an element of greater height of B. Therefore P is a principal system of B, as stated above.

Bibliography.

[1] J. Dieudonné, Sur les p-groupes abéliens infinis, *Portugaliae Math.*, **11** (1952), 1—5.

[2] A. Kertész, On the decomposibility of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 121—126.

[3] A. Kertész, On fully decomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 225—232.

[4] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, **9 (51)** (1941), 165—182.

[5] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, **16 (58)** (1945), 129—162.

[6] H. Prüfer, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **17** (1923), 35—61.

[7] T. Szele, Sur la décomposition des groupes abéliens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 1052—1053.

[8] T. Szele, On non-countable abelian p-groups, *Publicationes Math. Debrecen*, **2** (1952), 300—301.

(Received May 19, 1953.)

Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image.

By A. KERTÉSZ and T. SZELE in Debrecen.

§ 1. Introduction.

In a previous article one of us has determined all groups every subgroup of which is a direct summand [2][1]. In a subsequent joint paper [3] we have split this problem into the following two, rather difficult problems:

Problem I. Determine all groups every subgroup of which is an endomorphic image of the group.

Problem II. Determine all groups every endomorphic image of which is a direct summand of the group.

These problems seem to be very difficult even in the case of abelian groups. Our paper [3] is devoted to the discussion of Problem II in case of abelian groups, and contains an almost complete solution of this problem.

In the present paper we shall make the first step towards the solution of Problem I in the case of abelian groups, namely we determine all abelian groups G possessing the following property:

(1) *Every finitely generated subgroup of G is an endomorphic image of G.*

All such groups are described in Theorem 1 and 2 (see § 2).

As to notations and terminology we make the following remarks. By a group we always mean an additively written *abelian* group. The letters $x, a, b, c, \ldots, g$ denote elements of groups and the other small Latin letters ordinary integers. The symbol $\{a_1, a_2, \ldots\}$ denotes the group generated by the elements $a_1, a_2, \ldots$ of a group. We denote by $O(a)$ the order of the element a of a group. Then $1 \leqq O(a) \leqq \infty$. An abelian group is called *torsion-free* if it contains no element $\neq 0$ of finite order. In the contrary case, i. e. if any element of the group is of finite order, the group is called a *torsion group*. It may happen that in a torsion group there exists an element of maximal order. Then we say that the group is a *bounded group*. In the contrary case we call the group an *unbounded group*. It is well-known that any (abelian) torsion group splits into the direct sum of its uniquely determined *primary*

[1]) The numbers in brackets refer to the Bibliography at the end of this paper.

components, the latter being p-groups, i. e. groups every element of which is of p-power order where p denotes a fixed prime number. The direct sum of two groups A, B will be denoted by $A+B$. The cyclic group of order r ($1 \leqq r \leqq \infty$) we denote by $C(r)$. Then, e. g.,

$$\sum_{n} C(\infty) \tag{2}$$

is a direct sum of n cyclic groups of infinite order.

A system of elements (of an arbitrary finite or infinite cardinal number) $a_1, a_2, \ldots$ of a group is said to be independent if any relation (containing an arbitrary finite subset of the system)

$$m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k = 0$$

implies

$$m_1 a_1 = \cdots = m_k a_k = 0.$$

The maximal number of elements of an independent system of elements of infinite order in a group G is called the *torsion-free rank* of G.

A group A is called *algebraically closed* (or, in another terminology, complete) if any equation $nx = a$ has a solution $x \in A$ for each element $a \in A$ and for each natural number n. An equivalent of this condition is the requirement $nA = A$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. (Here nA denotes the set of all elements na with $a \in A$.) The union A of all algebraically closed subgroups of an arbitrary group P is obviously itself an algebraically closed group, and we call it the maximal algebraically closed subgroup of P. Since, by a well-known theorem of R. Baer ([1], p. 766), every algebraically closed subgroup of a group is a direct summand of the group, we have the representation

$$P = A + B \tag{3}$$

where the subgroup B of P contains (by the definition of A) no algebraically closed subgroup $\neq 0$. Such a group is called a *reduced group.* While the maximal algebraically closed subgroup A of P is invariantly defined, the reduced subgroup B in (3) is not uniquely determined in general. The structure of B, however, is uniquely determined, since (3) implies the isomorphism

$$B \cong P/A. \tag{4}$$

We make use of the representation (3) only in the case if P is a p-group. Then the subgroup A is defined as the union of all subgroups U of P for which $pU = U$ holds. It is well-known that an algebraically closed p-group U (i. e. a p-group with the property $pU = U$) is always a direct sum of groups of type $C(p^\infty)$, where $C(p^\infty)$ denotes the quasicyclic group of type (p^∞) defined as the additive group modulo 1 of the rational numbers with p-power denominators. Then the representation (3) says that any abelian p-group can be decomposed into a direct sum $A+B$ where the subgroup A is a direct sum of groups of type $C(p^\infty)$ while the subgroup B contains no subgroup of type $C(p^\infty)$.

§ 2. Results.

Our results are contained in the following two theorems.

Theorem 1. *Let G be an arbitrary abelian group containing only elements of finite order. Then every finitely generated subgroup of G is an endomorphic image of G if and only if for each primary component P of G the following requirement is fulfilled: if the maximal algebraically closed subgroup of A is not 0, then P/A is an unbounded group.*

Remark. Consequently a reduced torsion group G possesses always the property (1).

Theorem 2. *Let G be an arbitrary abelian group containing elements of infinite order. Then every finitely generated subgroup of G is an endomorphic image of G if and only if either G is a direct sum of a finite number of infinite cyclic groups and of a torsion group described in Theorem* 1, *or G contains a direct summand* (2) *for each n* $(=1, 2, 3, \ldots)$.

Remark. In particular, a torsion-free group G possesses the property (1) if and only if either G itself is finitely generated, or it contains a finitely generated direct summand of rank n for each n $(=1, 2, 3, \ldots)$.

§ 3. Proof of Theorem 1.

We start with the following

Lemma.[2]) *If a is an element of order p^r of an abelian p-group N such that*

(5) $$\{a\} \cap p^r N = 0,$$

then the cyclic subgroup $\{a\}$ is a direct summand of N.

Proof. We show that (5) implies

(6) $$N = \{a\} + M$$

with a suitable subgroup M of N. For this purpose we define M as a *maximal* subgroup of N possessing the following properties:

(7) $$p^r N \subseteq M, \quad \{a\} \cap M = 0.$$

(The existence of such a group M is assured by Zorn's lemma.) If (6) is not true, then there exists an element $x \in N$ such that

(8) $$x \notin \{a\} + M$$

but

$$px \in \{a\} + M$$

i. e.

(9) $$px = ta + d \qquad (d \in M).$$

Then we have by (9)

$$p^r x = p^{r-1} ta + p^{r-1} d.$$

[2]) This is a special case of a Theorem in [4].

On the other hand, we infer from (7) that $p^r x \in M$, i. e., by (7) and the last equation $p^{r-1} t a = 0$. Thus $t = pt'$, so that we get by (9)

$$p(x - t'a) = d,$$

i. e., for the element

$$x' = x - t'a \tag{10}$$

$$x' \notin M, \quad px' = d \in M$$

hold. This implies, by the maximality of M,

$$\{a\} \cap \{M, x'\} \neq 0.$$

Consequently $x' \in \{a\} + M$, which involves by (10)

$$x \in \{a\} + M.$$

This contradicts (8), completing so the proof of the Lemma.

P r o o f of the *necessity* of the conditions in Theorem 1. Let G be an arbitrary abelian torsion group with property (1), and P a primary component of G. Since the p-group P is an endomorphic image of G, P is also a group with property (1). Starting from this fact we show that P satisfies the requirement formulated in Theorem 1. Moreover, we shall prove this even under the weaker assumption that *every cyclic subgroup of P is an endomorphic image of P.* Suppose that, contrary to our assertation, for the representation (3) of P

$$A \neq 0, \quad p^{m-1}B \neq 0, \quad p^m B = 0 \tag{11}$$

hold with some natural number m. Then it follows from $A \neq 0$ that P contains a subgroup $C(p^{m+1})$. We show that this subgroup cannot be an endomorphic image of P. Indeed, the existence of a subgroup $H \subset P$ with

$$P/H \sim C(p^{m+1})$$

would imply $p^{m+1} P \subset H$. On the other hand, we have by (3) and (11)

$$p^{m+1} P = p^{m+1} A + p^{m+1} B = p^{m+1} A = A,$$

so that $A \subset H$. Then, however,

$$B \sim P/A \sim P/H \sim C(p^{m+1})$$

which is, by (11), impossible, proving so the necessity of the conditions in Theorem 1.

P r o o f of the *sufficiency* of the conditions in Theorem 1. In proving the sufficiency of the conditions, we can clearly restrict ourselves to the case in which $G = P$ is a p-group. Let us suppose that P is an abelian p-group, and P/A is an unbounded group, inasmuch as the maximal algebraically closed subgroup A of P is $\neq 0$. We have to show that every finite subgroup of P is an endomorphic image of P. If in the representation (3) B is a bounded group, then $A = 0$ and for the group $P = B$ our assertion follows immediately from the previous Lemma.[3]) Therefore in the sequel we have to consider only the case in which B *is an unbounded group.* Since, by (3), B is a homomorphic image of P, our above assertion follows from the fact that *an arbitrary finite abelian p-group is a homomorphic image of B.* This can be verified as follows. Let D be the cross cut of all groups

$$B,\ pB,\ p^2B,\dots,p^nB,\dots.$$

Obviously D is identical with the set of all elements *of infinite height* in B.[4]) We state that $\bar{B}=B/D$ *is an unbounded abelian p-group without elements of infinite height.* Indeed, $p^m\bar{B}=0$ would imply $p^mB\subseteq D$, i. e., $p^mB=p^{m+1}B=$ $=p(p^mB)$. But this is impossible since B is a reduced group, and thus the algebraically closed subgroup p^mB of B must be $=0$, in contradiction to our assumption that B is an unbounded group. On the other hand, $\bar{B}$ contains no element $\neq 0$ of infinite height. For let us suppose that the coset $\bar{b}=b+D$ $(b\in B)$ is an element of infinite height in the group $\bar{B}$. Then the congruence

$$p^n x\equiv b \pmod{D}$$

has a solution $x\in B$ for every natural number n. Since this congruence is equivalent to $p^nx-b\in D$ and every element of D is of infinite height in B, we obtain that b is an element of infinite height in B, i. e. $b\in D$ and therefore $\bar{b}=0$.

Thus we have reached our aim by proving the following statement: *Every finite abelian p-group is a homomorphic image of the unbounded abelian p-group $\bar{B}$ containing no element of infinite height.* This follows immediately by repeated application of the following fact: It s is an arbitrary natural number, then

$$\bar{B}=C(p^r)+M \qquad (r\geqq s) \tag{12}$$

holds with a suitable natural number $r\geqq s$ and with suitable subgroups $C(p^r)$, M of $\bar{B}$. We show the validity of this statement by the aid of the previous Lemma. Let b be an element of $\bar{B}$ with $O(b)=p^t\geqq p^s$. From $p^{t-1}b\neq 0$ we infer that there exists a maximal natural number h for which the equation $p^hx=p^{t-1}b$ can be solved in $\bar{B}$. Let $x=a\in\bar{B}$ be a solution of this equation, i. e.

$$p^ha=p^{t-1}b \qquad (h\geqq t-1).$$

Clearly

$$p^r=O(a)=p^{h+1}\geqq p^t\geqq p^s. \tag{13}$$

---

[3]) The Lemma implies, namely, that $\{a\}$ is a direct summand of P for each element $a\in P$ of maximal order. The repeated application of this procedure leads to the fact that every finite subgroup of P is an endomorphic image of P.

[4]) The element b of a p-group B is called an element of infinite height in B if the equation $p^nx=b$ has a solution $x\in B$ for each natural number n.

On the other hand,

(14) $$\{a\} \cap p^r \bar{B} = 0$$

holds. As a matter of fact, if (14) is not true we get

$$p^h a = p^{r-1} a = p^r b_1 \neq 0 \qquad (b_1 \in B)$$

which says that the equation $p^n x = p^h a = p^{r-1} b$ would have a solution $x = b_1 \in \bar{B}$ for $n = r = h + 1$, contrary to the maximal property of h. Hence (14) and (13) prove the validity of (12), completing so the proof of Theorem 1.

§ 4. Proof of Theorem 2.

In this section G denotes an abelian group containing elements of infinite order.

Proof of the *necessity* of the conditions in Theorem 2. Let G be first an arbitrary abelian group with property (1) and with the torsion-free rank $r < \infty$, and let $g_1, \ldots, g_r$ be an independent system of elements of infinite order in G. Then by our assumption

(15) $$G \sim \{g_1\} + \cdots + \{g_r\}.$$

Let g_i' be an inverse image of g_i under the homomorphism (15) ($i = 1, 2, \ldots, r$). Then we have obviously

$$G = \{g_1'\} + \cdots + \{g_r'\} + T$$

where T is the kernel of the homomorphism (15). Clearly T is identical with *the torsion subgroup* of G (i. e. T consists of all elements of finite order of G) for T contains no element of infinite order, r being the torsion-free rank of G.

By Theorem 1 there remains only to be proved that T is a group with property (1). Let therefore F be an arbitrary finite subgroup of T. Then

(16) $$S = \{g_1'\} + \cdots + \{g_r'\} + F$$

is a finitely generated subgroup of G, and consequently

(17) $$G \sim S.$$

We have to show that this homomorphism maps the subgroup T onto F. If $g_i'' \in G$ is an inverse image of g_i' under this homomorphism ($i = 1, 2, \ldots, r$), then we have — as before —

(18) $$G = \{g_1''\} + \cdots + \{g_r''\} + K$$

where K consists of all elements of G which are mapped into F under the homomorphism (17). (Namely K is the kernel of the product of two homomorphisms α and β where α denotes the homomorphism (17) and β denotes the "projection" of S onto $\{g_1'\} + \cdots + \{g_r'\}$ corresponding to the direct representation (16).) Since $g_1'', \ldots, g_r''$ are elements of infinite order, we have in (18) $K = T$ which shows that the homomorphism (17) maps only elements of T into F. This means that the image of T under the homomorphism (17) is exactly F. Thus we have completed the proof for the case, in which the torsion-free rank of G is finite.

Now, if the torsion-free rank of G is infinite, then let $g_1, g_2, \ldots$ be an infinite independent system of elements of infinite order in G. Since, by the property (1) of G, for an arbitrary natural number n the subgroup

$$\{g_1\} + \cdots + (g_n\}$$

is an endomorphic image of G, we get — as before —

$$G = \{g_1'\} + \cdots + \{g_n'\} + H,$$

H being the kernel of the endomorphism in question. This completes the proof of the necessity of the conditions in Theorem 2.

Proof of the *sufficiency* of the conditions in Theorem 2. Let be first

$$G = \{g_1\} + \cdots + \{g_r\} + T \tag{19}$$

where $\{g_i\}$ is an infinite cyclic group ($i = 1, 2, \ldots, r$) and T is an abelian group with property (1). Since each finitely generated subgroup S of G is a direct sum of a finite subgroup F of T and of a free abelian group of rank $\leqq r$, the representation (19) shows immediately that S is a homomorphic image of G.

On the other hand, if C contains a direct summand (2) for each natural number n, then it is obvious that an arbitrary finitely generated abelian group is a homomorphic image of G. This completes the proof of Theorem 2.

Bibliography.

[1] R. Baer, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.*, (2) **37** (1936), 766—781.

[2] A. Kertész, On groups every subgroup of which is a direct summand, *Publicationes Math. Debrecen*, **2** (1951), 74—75.

[3] A. Kertész and T. Szele, On abelian groups every multiple of which is a direct summand, *these Acta*, **14** (1952), 157—166.

[4] T. Szele, On direct decomposition of abelian groups, *Journal London Math. Soc.*, **28** (1953), 247—250.

(Received May 22, 1953.)

An assertion which is equivalent to the generalized continuum hypothesis.

By G. FODOR in Szeged.

Let E be a set of power $2^{\aleph_\alpha}$. Denote by B the set of all subsets of E consisting of two elements only.

We shall prove that *the generalized continuum hypothesis H is equivalent to the following assertion*:

A. There exists a (many-to-one) mapping T of B into E such that

1) *for any $r = \{x, y\} \in B$ we have either $Tr = x$ or $Tr = y$,*

2) *for any subset E_1 with power $> \aleph_\alpha$, the union of the sets $r \in B$ for which $Tr \in E_1$, is equal to E:*

$$\cup T^{-1} E_1 = E.^{1)}$$

Proof. Let the elements of E be arranged in a transfinite sequence of ordinal type φ

$$(1) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

where φ is the initial ordinal of power $2^{\aleph_\alpha}$.

First we shall show that A is a consequence of H. Suppose that H is true. The desired mapping T^* which fulfils the assertion A is defined in the following way. Let, for every $r \in B$, $T^* r$ be equal to the element of r which has a greater subscript in the sequence (1). Consider an arbitrary subset D of power $> \aleph_\alpha$ of E. The sum of the elements $r \in B$ for which $T^{*^{-1}} x = r$ for arbitrary element $x = x_\gamma$ of D is equal to the set $\{x_\varkappa\}_{\varkappa \leqq \gamma}$: $\cup T^{*^{-1}} x_\gamma = \{x_\gamma\}_{\varkappa \leqq \gamma}$. By the continuum hypothesis H, D is a subsequence of type φ of the sequence (1). It follows that the sum of the elements r of B for which $T^* r \in D$ is equal to E.

Next we prove that H is a consequence of A. Suppose T is a mapping which fulfil the conditions of A. Let x_η be a given element of E. We prove that the power of set of those $\{x_\eta, x_\gamma\} \in B$ for which $\gamma > \eta$ and $T\{x_\eta, x_\gamma\} = x_\eta$, is

---

1) For any $F \subset E$, we denote by $\cup T^{-1} F$ the union of all those sets $r (\in B)$ for which $Tr \in F$.

$\leqq \aleph_\alpha$. In fact, admitting the contrary the power of the set V of the elements x_γ for which $\gamma > \eta$ and $T\{x_\eta, x_\gamma\} = x_\eta$ is greater than $\aleph_\alpha$. It follows then from the property 2) of the mapping T that

$$\cup T^{-1} V = E,$$

i. e., in particular, $\cup T^{-1} V \ni x_\eta$. Thus there exists at least one $r \in B$ such that $Tr \in V$, $Tr = x_\varkappa$ say ($\varkappa > \eta$), and $r \ni x_\eta$. By the property 1) of T we have necessarily $r = \{x_\eta, x_\varkappa\}$. But $x_\varkappa$ being an element of V, it follows by the definition of V that $Tr = x_\eta$, and this contradicts to $Tr = x_\varkappa$.

Consider now the section $C = \{x_\gamma\}_{\gamma < \omega_{\alpha+1}}$ of the sequence (1). It is evident that for any $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ the power of the set of sets $\{x_\gamma, x_\beta\}$ ($\beta < \gamma$) for which $T\{x_\gamma, x_\beta\} = x_\gamma$ is $\leqq \aleph_\alpha$. According to that has been seen above the power of the set of sets $\{x_\gamma, x_\beta\}$. ($\beta > \gamma$) for which $T\{x_\gamma, x_\beta\} = x_\gamma$ is $\leqq \aleph$ too. As $\bar{C} = \aleph_{\alpha+1}$ it follows that

$$\aleph_{\alpha+1} \leqq \cup T^{-1} C \leqq \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha.$$

As $\aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+1}$ we have therefore $\cup T^{-1} C = \aleph_{\alpha+1}$. But, by the condition 2) of T, we have

$$\cup T^{-1} C = E.$$

Consequently

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

(Received October 1, 1952.)

On the factorizations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$.

By NOBORU ITÔ in Nagoya (Japan).

In the factorization theory of finite groups we refer to the following two theorems of J. SZÉP: (1) Let G admit a maximal Sylow factorization. If neither of the factors is normal, then G is simple. (2) Let H be a non-factorizable simple group. Let P be a minimal representation module of H over the prime field of characteristic p. Let G be the holomorph of P by H. Then in any factorization of G, the meet of the factors contains no normal subgroup ($\neq 1$) of either of the factors. The converse is also true[1][2][3].

Now the purpose of the present paper is to enumerate the factorizations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$. This may be done without much difficulties, since all the subgroups of $LF(2, p^n)$ are known[4]. Some of our results, however, may be modified so as to be applied to the higher degree case.

Next, we shall give some remarks on the above theorems of J. SZÉP: (1) We show that $LF(2, p^n)$ with $p^n \equiv 3 \pmod 4$ admits a maximal Sylow factorization in which neither of the factors is normal. The only exceptionals are $LF(2, 3)$ and $LF(2, 7)$. Therefore J. SZÉP's theorem (1) is applicable to prove the simplicity of such groups. In fact, proofs on this line are, as it seems to the writer, more easily comprehensible than the other known proofs. (2) We show that $LF(2, p^n)$ with $p^n \equiv 1 \pmod 4$ admits no factorization. The only exceptionals are $LF(2, 5)$, $LF(2, 3^2)$ and $LF(2, 29)$. Therefore we may take such an $LF(2, p^n)$ as H in J. SZÉP's theorem (2).

§ 1.

Let G be a product of two proper subgroups H and K: $G = H \cdot K$. Then we say that G is factorizable and $G = H \cdot K$ is a factorization of G, where H and K are the factors of this factorization. Let H_1 and K_1 be any conjugate subgroups of H and K respectively. We can get H_1 by transforming H with a suitable element of K, and similarly with K_1. Therefore G admits also the factorization $G = H_1 \cdot K_1$. We say that this factorization of G is equivalent to the original one. Further we refer to the number of non-equivalent factorizations of G simply as the number of factorizations of G.

---

[1]) J. SZÉP, On factorisable simple groups, *these Acta*, **14** (1951), 22.

[2]) J. SZÉP, Zur Theorie der endlichen einfachen Gruppen, *these Acta*, **14** (1951), 111—112. — *Remark of the referee:* By (2) the author means the exceptional case of the theorem in the cited paper. In a previous letter to J. SZÉP the author remarked that the $\mathfrak{N}$ figuring in the proof of this theorem is, in the exceptional case of the theorem, an elementary abelian p-group.

[3]) For definitions see § 1.

[4]) Cf. L. E. DICKSON, *Linear Groups* (Leipzig, 1901), especially Chapter XII.

We introduce an order into the set of all the factorizations of G as follows. Let $G=H\cdot K$ and $G=\tilde{H}\cdot\tilde{K}$ be two factorizations of G. We say that $G=H\cdot K$ is greater than $G=\tilde{H}\cdot\tilde{K}$ if we have either $H\supsetneqq\tilde{H}$ and $K\supset\tilde{K}$ or $H\supset\tilde{H}$ and $K\supsetneqq\tilde{K}$. In this sense we use the terminologies such as a maximal factorization and a minimal factorization. A factorization is maximal if and only if both factors are maximal subgroups. If $H\cap K=1$, with a factorization $G=H\cdot K$, we call this factorization an exact factorization. Obviously an exact factorization is a minimal factorization. An exact factorization $G=H\cdot K$ such that $(H:1, K:1)=1$ we call a Sylow factorization. Then every soluble group admits, by P. HALL's theorem, just one Sylow factorization [5]). There exists, however, a group admitting more than one Sylow factorization, for instance, $LF(2, 11)$ and $LF(2, 23)$ as we show in § 3. Further we remark that these notions are easily modified to those of the factorization classes.

§ 2.

We summarize here the necessary results on subgroups of the linear fractional group $LF(2, p^n)$. [6])

(1) Let q be a prime such that $p^{2n}\equiv 1 \pmod q$ and $p^m \not\equiv 1 \pmod q$ for any $m<2n$. Assume $q\geqq 7$. Then every maximal subgroup of $LF(2, p^n)$, whose order is divisible by q, is a dihedral group D of order p^n+1 for $p>2$ and of order $2(2^n+1)$ for $p=2$. Further, all such subgroups, with a fixed q, are conjugate with one another.

The same holds for $q=5$ and $q=3$ if the order of a maximal subgroup is divisible by q^2. On the contrary, if the order of a maximal subgroup is divisible by q to the first power only, then the subgroup may be one of the following three types of groups for $q=3$: (1) the tetrahedral group A_4 for $p^n\equiv 3 \pmod 8$, (2) the octahedral group S_4 for $p^n\equiv 1 \pmod 8$, and (3) the icosahedral group A_5 for $p^n\equiv\pm 1 \pmod{10}$; and it may be A_5 for $q=5$ and $p^n\equiv\pm 1 \pmod{10}$. Further, the A_4's are all conjugate with one another and the S_4's and the A_5's constitute two classes of conjugate subgroups.

(2) Assume $p>2$. Every maximal subgroup of $LF(2, p^n)$ containing a p-Sylow subgroup of $LF(2, p^n)$ is a normalizer N of the p-Sylow subgroup. They are clearly all conjugate with one another.

(3) Assume $p=2$ and $n>2$. Every maximal subgroup of $LF(2, 2^n)$, whose order is divisible by 2^{n-1}, is the normalizer N of a 2-Sylow subgroup. They are clearly all conjugate with one another.

---

5) P. HALL proved that every soluble group is representable uniquely (up to the conjugation) as a product of pairwise commutative Sylow subgroups. See P. HALL, On the Sylow systems of a soluble group, *Proc. London Math. Soc.*, **43** (1937), 316—323. This theorem can be considered as a generalization of the so-called fundamental theorem of the elementary number theory.

6) See 4).

(4) A theorem of E. GALOIS. $LF(2, p^n)$ always contains subgroups of index p^n+1, but contains subgroups of lower index only when $p^n = 2, 3, 5, 7, 3^2, 11$.

§ 3.

(1) Let us consider the linear fractional group $G = LF(2, p^n)$ other than $LF(2, 2^3)$ and $LF(2, p)$, where p is a Fermat prime: $p = 2^K - 1$. Since the order of G is $\frac{p^n(p^{2n}-1)}{2}$ for $p > 2$ and is $2^n(2^{2n}-1)$ for $p = 2$, we see, by a theorem of K. ZSIGMONDY[7]), that there exists a prime q such that $p^{2n} \equiv 1 \pmod q$ and $p^m \not\equiv 1 \pmod q$ for any $m < 2n$. Let q be the largest one among such primes. We first treat the case $q \geqq 7$.

Let us assume that G is factorizable and let $G = H \cdot K$ be a maximal factorization. Hence both H and K are maximal subgroups of G. Since the order of either H or K is divisible by q, we may assume, by symmetry, that the order of K is divisible by q. Then we have, by § 2(1), that $K = D$. Now we further assume that $p > 2$. Since the order of K is prime to p, H contains a p-Sylow subgroup of G. Therefore, by § 2(2), $H = N$. Since the orders of K and N are p^n+1 and $\frac{p^n(p^n-1)}{2}$ respectively, clearly $N \cap D = 1$. Conversely, if $N \cap D = 1$, then G admits clearly the factorization $G = N \cdot D$. Now if $\frac{p^n-1}{2}$ is odd, that is, if $p^n \equiv 3 \pmod 4$, then $\frac{p^n(p^n-1)}{2}$ and p^n+1 are relatively prime to each other. Therefore $D \cap N = 1$. Hence in this case G admits the only one factorization $G = N \cdot D$. On the other hand if $\frac{p^n-1}{2}$ is even, that is, if $p^n \equiv 1 \pmod 4$, then both $\frac{p^n-1}{2}$ and p^n+1 are even. Since all the elements of order 2 are conjugate with one another and every conjugate subgroup of N can be attained from N by the transformation with a suitable element of D, the element of order 2 of D can be assumed to be contained in N. Therefore $N \cap D > 1$. Hence in this case G admits no factorization.

(2) Now let us assume $p = 2$. Under our assumptions we have clearly $n \geqq 4$. Since the order of D is divisible by 2 only to the first power, we have, by § 2 (3), $H = N$. Since the orders of D and N are $2(2^n+1)$ and $2(2^n-1)$, G clearly admits the factorization $G = D \cdot N$, where the order of $D \cap N$ is 2. Further, let Z be the cyclic subgroup of order 2^n+1 of D. Then also $G = Z \cdot N$, where $Z \cap N = 1$. Hence in this case G admits just two factorizations: $G = D \cdot N$ and $G = Z \cdot N$.

[7]) K. ZSIGMONDY, Zur Theorie der Potenzreste, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 3 (1892), 265—284.

(3) Next we treat the case $q=5$. We can, however, by § 2 (1), assume that q divides $p^{2n}-1$ to the first power only and that $p^m \not\equiv 1 \pmod q$ for any $m<2n$. Since at least one of the three numbers $p-1, p^2-1$ and p^4-1 is divisible by 5, we clearly have that $n \leqq 2$. More precisely if $p \equiv 4 \pmod 5$, then $n=1$, and if $p\equiv 2$ or $3 \pmod 5$, then $n=2$. Further, by a celebrated theorem of E. GALOIS and by § 2 (1), we have only to consider $LF(2, p)$ for $p \leqq 59$ and $p\equiv 4 \pmod 5$, and $LF(2, p^2)$ for $p^2 \leqq 59$ and $p\equiv 2$ or $3 \pmod 5$. Under our assumptions $LF(2, 2^2)$, $LF(2, 3^2)$, $LF(2, 19)$ and $LF(2, 29)$ only can enter into our consideration. Let us first consider $LF(2, 19)$ and $LF(2, 29)$. At any rate, since $19 \equiv 3 \pmod 4$, $LF(2, 19)$ admits the factorization $LF(2, 19) = N\cdot D$, and since $29\equiv 1 \pmod 4$, $LF(2, 29)$ does not admit such a factorization. Now let us assume that $LF(2, 19)$ and $LF(2, 29)$ admit the following factorizations: $LF(2, 19)=N\cdot A_5$ and $LF(2, 29)=N\cdot A_5$, where A_5 is the icosahedral group. We must have that the order of $N\cap A_5$ is 3 for $LF(2, 19)$ and is 2 for $LF(2, 29)$. Now since these actually hold good for $N\cap A_5$, $LF(2, 19)$ and $LF(2, 29)$ admit actually such factorizations. Since a 3-Sylow subgroup of $LF(2, 19)$ is cyclic, we clearly have that $LF(2, 19)=N\cdot A_5$ is a minimal factorization. On the other hand, let S be the subgroup of order $29\cdot 7$ of N. Then clearly $LF(2, 29)$ admits the factorization: $LF(2, 29)=S\cdot A_5$ where $S\cap A_5 = 1$. Since A_5's constitute just two classes of conjugate subgroups in both $LF(2, 19)$ and $LF(2, 29)$, we have that $LF(2, 19)$ admits just three factorizations $LF(2, 19)=N\cdot D$ and two $LF(2, 19)=N\cdot A_5$, and that $LF(2, 29)$ admits just four factorizations: two $LF(2, 29)=N\cdot A_5$ and two $LF(2, 29) = S\cdot A_5$.

(4) Secondly let us consider $LF(2, 3^2)$ and $LF(2, 2^2)$. We remark that these are isomorphic to A_6 and A_5 respectively, where A_n is the alternation group of degree n. Now maximal subgroups, of $LF(2, 3^2)$, whose orders are divisible by 3 are N, S_4, and A_5, where S_4 is the octahedral group. Since $3^2 \equiv 1 \pmod 4$, $LF(2, 3^2)$ admits no factorization of the form $LF(2, 3)=H\cdot D$, where H is one of the three groups N, S_4 and A_5. Therefore we clearly have, by § 2 (1), that $K=A_5$. Since a 2-Sylow subgroup of N is cyclic, the order of $N\cap A_5$ is 6. Therefore $LF(2, 3^2)$ admits the factorization $LF(2, 3)=N\cdot A_5$. Since a subgroup of index 6 of A_5 is D, and since all the elements of order 2 of $LF(2, 3^2)$ are conjugate with one another, and since N contains no subgroup of order 12, the factorization $LF(2, 3^2)=N\cdot A_5$ is minimal. Next we consider the case that the $H=S_4\cdot S_4$'s constitute just two classes of conjugate subgroups in $LF(2, 3^2)$ which we represent by $S_4^{(1)}$ and $S_4^{(2)}$ respectively. Similarly the A_5's constitute just two classes of conjugate subgroups in $LF(2, 3^2)$, which we represent by $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$ respectively. Thereby we can assume, as we easily see, that the order of $S_4^{(i)}\cap A_5^{(i)}$ is 4 for $i=1, 2$ and the order of $S_4^{(i)}\cap A_5^{(j)}$ is 12 for $i, j=1, 2$ and $i\neq j$. Therefore $LF(2, 3^2)$ admits the factorization $LF(2, 3^2)=S_4^{(i)}\cdot A_5^{(i)}$ for $i=1, 2$ and does not admit the factorization $LF(2, 3^2) = S_4^{(i)}\cdot A_5^{(j)}$ for $i, j=1, 2$ and $i\neq j$. Now let $A_4^{(i)}$ be the tetrahedral subgroup

of $S_4^{(i)}$ for $i=1,2$. Since clearly the order of $A_4^{(i)} \cap A_5^{(i)}$ is 4 for $i=1,2$, we have that $LF(2,3^2)$ does not admit the factorization $LF(2,3^2)=A_4^{(i)} \cdot A_5^{(i)}$ for $i=1,2$. Therefore $LF(2,3^2)=S_4^{(i)} \cdot A_5^{(i)}$ for $i=1,2$ is a minimal factorization, where $S_4^{(i)} \cap A_5^{(i)}$ is of order 4. Finally we consider the case $H=A_5^{(1)}$ and $K=A_5^{(2)}$. Then we easily see that the order of $A_5^{(1)} \cap A_5^{(2)}$ is 10. Therefore $LF(2,3^2)$ admits the factorization $LF(2,3^2)=A_5^{(1)} \cdot A_5^{(2)}$. Further let $A_4^{(i)}$ be a tetrahedral subgroup of $A_5^{(i)}$ for $i=1,2$. Then, since clearly the order of $A_4^{(1)} \cap A_5^{(2)}$ and $A_4^{(2)} \cap A_5^{(1)}$ is 2, $LF(2,3^2)$ admits the factorizations $LF(2,3^2)=$ $=A_4^{(1)} \cdot A_5^{(2)}$ and $LF(2,3)=A_5^{(1)} \cdot A_4^{(2)}$ where $A_4^{(1)} \cap A_5^{(2)}$ and $A_5^{(1)} \cap A_4^{(2)}$ are of order 2. These factorizations are clearly minimal factorizations. In altogether, $LF(2,3^2)$ admits just seven factorizations: two $LF(2,3^2)=N \cdot A_5$, two $LF(2,3^2)=S_4 \cdot A_5$, $LF(2,3^2)=A_5 \cdot A_5$ and two $LF(2,3^2)=A_4 \cdot A_5$. Now the case of $LF(2,2^2)$ is rather evident. We immediately have the following result: $LF(2,2^2)$ admits just two factorizations: $LF(2,2^2)=N \cdot D$ and $LF(2,2^2)=Z \cdot N$.

(5) Next we treat again the case $q=3$. We can, as in the case $q=5$, assume, by § 2 (1), that q divides $p^{2n}-1$ to the first power only and that $p^m \not\equiv 1 \pmod q$ for any $m<2n$. Since at least one of two numbers $p-1$ and p^2-1 is divisible by 3, clearly $n=1$ and $p \equiv 2 \pmod 3$. Moreover, by the theorem of E. GALOIS and by § 2 (1), we have only to consider $LF(2,p)$ for $p<59$. Under our assumptions $LF(2,2)$, $LF(2,5)$ $LF(2,11)$ and $LF(2,23)$ only can enter into our consideration. Clearly $LF(2,2)$ admits just one factorization $LF(2,2)=N \cdot Z$, where Z is the 3-Sylow subgroup. Since $LF(2,5)$ $\sim LF(2,2^2) \cong A_5$, we have first trivially that $LF(2,5)$ admits just two factorization: $LF(2,5)=D \cdot N$ and $LF(2,5)=Z \cdot N$. Let us next consider $LF(2,11)$. At any rate, since $11 \equiv 3 \pmod 4$, $LF(2,11)$ admits the factorization $LF(2,11)=N \cdot D$. Further naturally $H=N$. Now, since clearly $N \cap A_4=1$, we see that $LF(2,11)$ admits the following factorizations: $LF(2,11)=N \cdot A_4$ and $LF(2,11)=N \cdot A_5$. Now let Z be the 11-Sylow subgroup of N. Since again we clearly have that $Z \cap A_5=1$, $LF(2,11)$ admits the factorization $LF(2,11)=Z \cdot A_5$. We remark here that the A_5's constitute just two classes of conjugate subgroups in $LF(2,11)$. Thus we see that $LF(2,11)$ admits just six factorization: $LF(2,11)=N \cdot D$, $LF(2,11)=N \cdot A_4$, two $LF(2,11)=N \cdot A_5$ and two $LF(2,11)=Z \cdot A_5$. Finally let us consider $LF(2,23)$. At any rate, since $23 \equiv 3 \pmod 4$, $LF(2,23)$ admits the factorization $LF(2,23)=N \cdot D$. Further we have naturally that $H=N$. Now since clearly $N \cap S_4=1$, we see that $LF(2,23)$ admits the factorization $LF(2,23)=N \cdot S_4$ where $N \cap S_4=1$. Since the S_4's constitute just two classes of conjugate subgroups in $LF(2,23)$, we have that $LF(2,23)$ admits just three factorizations $LF(2,23)=N \cdot D$ and two factorizations $LF(2,23)=N \cdot S_4$.

R e m a r k. Obviously the factorizations of $LF(2,11)$: $LF(2,11)=$ $=N \cdot D=N \cdot A_4=Z \cdot A_5^{(1)}=Z \cdot A_5^{(2)}$ and those of $LF(2,23)$: $LF(2,23)=N \cdot D=$ $=N \cdot S_4^{(1)}=N \cdot S_4^{(2)}$ are all Sylow factorizations. Clearly D and A_4 in $LF(2,11)$, or D and S_4 in $LF(2, 23)$, are not isomorphic with each other. Similarly $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$ in $LF(2, 11)$, or $S_4^{(1)}$ and $S_4^{(2)}$ in $LF(2, 23)$ are not conjugate with each other. This shows the Sylow structure theory of P. Hall on soluble groups certainly fails to hold for general finite groups. It may be of interest to find a general method of constructing groups in which the Sylow structure theory does not hold.

Let us lastly consider $LF(2. 2^3)$ and $LF(2,p)$ for $p=2^k-1$ $(k\geqq 2)$. Since a 3-Sylow subgroup of $LF(2, 2^3)$ is cyclic, we may assume, by a theorem of H. Wielandt[8]), that either H or K, say H, by symmetry, contains a 3-Sylow subgroup of $LF(2, 2^3)$. Therefore, as before, we have that $H=D$. Then, since the order of K must be divisible by 2^3, we have, by § 2 (3), that $K=N$. Hence $LF(2, 2^3)$ admits just two factorizations: $LF(2, 2^3)=N\cdot D$ and $LF(2, 2^3)=N\cdot Z$, where Z is the cyclic subgroups of order 9 of K. In other words $LF(2, 2^3)$ admits the same factorizations as $LF(2, 2^n)$ for $n\geqq 4$. Now we treat $LF(2, 3)$. Since $LF(2, 3)$ is isomorphic to the tetrahedral group, we see immediately that $LF(2, 3)$ admits the only one factorization $LF(2,3)=N\cdot D$, where N is a 3-Sylow subgroup and H is the 2-Sylow subgroup of $LF(2, 3)$. So, consider $LF(2, p)$ for $p=2^k-1$ $(k\geqq 3)$. At any rate we have, by § 2 (2), that $H=N$. Since the order of N is odd, K clearly contains a 2-Sylow subgroup of $LF(2,p)$. Now let us assume that $k\geqq 4$. Then by § 2 (1), a 2-Sylow subgroup of $LF(2,p)$ is maximal. Clearly it is a dihedral group. Therefore $K=D$. Hence we have that $LF(2,p)$ for $p=2^k-1$ $(k\geqq 4)$ admits the only one factorization $LF(2,p)=N\cdot D$, where K is a 2-Sylow subgroup. Finally treat $LF(2, 7)$. Here we have, by § 2 (1), that $LF(2, 7)$ contains as a maximal subgroup the octahedral group S_4. Therefore we have that $K=S_4$. Let Z and D be the 7-Sylow subgroup and a 2-Sylow subgroup of N and S_4 respectively. Since cleary $Z\cap S_4=1$ and $N\cap D=1$, and since S_4's constitute just two classes of conjugate subgroups in $LF(2, 7)$, we have that $LF(2, 7)$ admits just five factorizations: two $LF(2, 7)=N\cdot S_4$, two $LF(2, 7)=Z\cdot S_4$ and $LF(2, 7)=N\cdot D$.

Remark. Thus we see that there exists a simple group with a nilpotent maximal subgroup; $LF(2,p)$ for $p=2^k-1$ and $k\geqq 4$ is such one. Naturally such a group is not nilpotent-factorizable, since, otherwise, it must be soluble[9]). It may be of interest to seek for a simple group with a maximal p-Sylow subgroup for $p>2$.

MATHEMATICAL INSTITUTE
NAGOYA UNIVERSITY.

(Received December 20, 1952.)

[8]) H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **55** (1951), 1—7.

[9]) Cf. N. Itô, Remarks on factorizable groups, *these Acta*, **14** (1951), 83—84.

Eine Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung.

Von J. SZÉP und L. RÉDEI in Szeged.

Bezeichne G eine Gruppe mit Doppelkettensatz für Normalteiler. Wir nennen

(1) $$G = N_1 N_2 \dots N_n$$

eine normale Zerlegung von G, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) Alle N_i sind Normalteiler von G.
b) Kein N_i läßt sich in (1) streichen.
c) Kein N_i ist ein Produkt von seinen zwei echten Normalteilern.

Im Falle einer normalen Zerlegung (1) setzen wir

(2) $$D_{ik} = N_i \cap N_k \qquad (i \neq k;\ i, k = 1, \dots, n),$$

(3) $$D = \prod_{i \neq k} D_{ik}.$$

Wir nennen D den *Kern* der normalen Zerlegung (1). Es ist klar, daß die normale Zerlegung die Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung ist, und zwar ist die normale Zerlegung (1) dann und nur dann eine Remaksche Zerlegung, wenn $D = 1$ ist. Es handelt sich bei uns um eine wirkliche Verallgemeinerung, wie das das Beispiel der Quaternionengruppe zeigt, die nämlich das Produkt von irgendzwei verschiedenen (zyklischen) Untergruppen vierter Ordnung ist.

Im folgenden werden wir den auf die Remakschen Zerlegungen beziehenden wohlbekannten Satz von KRULL—SCHMIDT[1]) für die normalen Zerlegungen verallgemeinern. Wir bemerken aber im voraus, daß wir nur über zwei solche normalen Zerlegungen eine Aussage bekommen werden, die einen gemeinsamen Kern haben. Die Frage konnten wir nicht untersuchen, welche (normalen) Untergruppen von G überhaupt als Kern einer normalen Zerlegung auftreten können.

---

[1]) H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig, 1937), S. 79.

Satz. *Sind $G = N_1 \dots N_n = N'_1 \dots N'_{n'}$ zwei normale Zerlegungen von G mit demselben Kern D, so ist $n = n'$ und nach passender Umnumerierung der N'_i ist N_iD/D zentral isomorph mit N'_iD/D in G/D $(i = 1, \dots, n)$, ferner gelten die normalen Zerlegungen $G = N_1 \dots N_i N'_{i+1} \dots N'_n$.*[2])

Dem Beweis schicken wir die folgenden voraus.

1. Da offenbar

$$N_1 \dots N_{i-1} D N_{i+1} \dots N_n = N_1 \dots N_{i-1} N_{i+1} \dots N_n$$

ist, so gilt

$$G \neq N_1 \dots N_{i-1} D N_{i+1} \dots N_n.$$

2. Kein N_i ist in D enthalten. Dies folgt aus 1.

3. Wir setzen

$$D_i^* = N_i \cap D$$

und zeigen, daß die N_i/D_i^* direkt unzerlegbar sind. Da nämlich aus jeder direkten Zerlegung $N_i/D_i^* = M_i/D_i^* \times M'_i/D_i^*$ die Zerlegung $N_i = M_iM'_i$ folgt, so sieht man hieraus die Richtigkeit der Behauptung ein.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den Satz wie folgt.

Wir setzen (vgl. 2)

$$\overline{N}_i = N_iD \neq D \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Offenbar gilt

$$G/D = \overline{N}_1/D \times \dots \times \overline{N}_n/D. \tag{4}$$

Da die Isomorphie

$$\overline{N}_i/D \cong N_i/D_i^*$$

gilt, so sind (wegen 3) die Faktoren in (4) direkt unzerlegbar. Das bedeutet, daß (4) eine Remaksche Zerlegung von G/D ist.

Hieraus folgt die Richtigkeit unseres Satzes mit Anwendung des Satzes von KRULL—SCHMIDT.

(Eingegangen am 16. Juni 1953.)

---

[2]) Wir wissen nicht, ob auch die letzteren normalen Zerlegungen den Kern D haben. Selbstverständlich behält unser Satz seine Gültigkeit auch für Operatorgruppen. Auch sieht man, daß der Fall $D = 1$ eben der Satz von KRULL—SCHMIDT ist.

Sur les contractions de l'espace de Hilbert.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1. Par *contraction* de l'espace de Hilbert H nous entendons une transformation linéaire T de H qui n'augmente pas les normes:

$$\|Tf\| \leqq \|f\| \quad \text{pour tout} \quad f \in H,$$

c'est-à-dire pour laquelle

$$\|T\| \leqq 1.$$

Les contractions T se comportent à plusieurs points de vue tout comme les transformations unitaires. Citons les faits suivants:

a) *Éléments invariants*[1]). Si f est invariant par rapport à T, il l'est aussi par rapport à la transformation adjointe T^*.

b) *Théorème ergodique*[1]). Pour tout $f \in H$, les moyennes arithmétiques

$$\frac{1}{n-m} \sum_{m}^{n-1} T^k f$$

tendent, lorsque $n > m \geqq 0$, $n - m \to \infty$, vers un élément $f^* \in H$, invariant par rapport à T.

c) *Théorèmes de von Neumann et de Heinz.* Soit $u(z)$ une fonction de variable complexe, holomorphe dans un domaine contenant le disque unité fermé $|z| \leqq 1$, et ayant la série entière

$$u(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

Soit

$$u(T) = c_0 I + c_1 T + \cdots + c_n T^n + \cdots.^{2)}$$

Si $|u(z)| \leqq 1$ pour $|z| \leqq 1$, on a $\|u(T)\| \leqq 1$, c'est-à-dire que $u(T)$ est alors aussi une contraction.[3])

Si $\mathrm{Re}\, u(z) \geqq 0$ pour $|z| \leqq 1$, on a $\mathrm{Re}\,(u(T)f, f) \geqq 0$ pour tout $f \in H$.[4])

---

[1]) F. RIESZ—B. SZ.-NAGY, Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *ces Acta*, **10** (1943), 202—205.

[2]) Puisque $|c_n| \leqq M/r^n$ avec $r > 1$, cette série de transformations converge en norme.

[3]) J. VON NEUMANN, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 258—281.

[4]) E. HEINZ, Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum, *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, Abt. IIa, **1952**, 5—6.

Pour les transformations *unitaires* U, tous ces faits s'établissent d'une manière comparativement simple, surtout si l'on fait usage de la représentation spectrale de U.

Or il y a une relation intime entre les contractions de type général, et les transformations unitaires, par laquelle les faits cités découlent des faits correspondants pour les transformations unitaires. Cette relation est exprimée par le

Théorème I. *T étant une contraction de l'espace de Hilbert H, il existe un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ contenant H comme un sous-espace, et une transformation unitaire $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{H}$, de sorte que, en désignant par $\boldsymbol{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace H, on ait*

$$T^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^k, \quad (T^*)^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^{-k} \qquad (k=0,1,2,\ldots).\text{[5][6]} \tag{1}$$

Voici comment les faits énumérés dérivent par ce théorème:

a) $Tf=f$ entraîne que $\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}f=f$; or puisque $\|\boldsymbol{U}f\|=\|f\|$ et que $\boldsymbol{P}$ est une projection orthogonale, l'équation $\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}f=f$ n'est possible que si $\boldsymbol{U}f=f$, donc $T^*f=\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^{-1}f=\boldsymbol{P}f=f$.

b) Comme

$$\sum_m^{n-1} T^k f = \boldsymbol{P}\sum_m^{n-1} \boldsymbol{U}^k f,$$

le théorème ergodique pour T se réduit à celui pour la transformation unitaire $\boldsymbol{U}$.

c) On aura $u(T)=\boldsymbol{P}u(\boldsymbol{U})$. Si

$$\boldsymbol{U}=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda$$

est la représentation spectrale de $\boldsymbol{U}$, il en découle que

$$\|u(T)f\|^2=\|\boldsymbol{P}u(\boldsymbol{U})f\|^2 \leqq \|u(\boldsymbol{U})f\|^2=\int_0^{2\pi}|u(e^{i\lambda})|^2 d(\boldsymbol{E}_\lambda f,f)$$

et

$$(u(T)f,f)=(\boldsymbol{P}u(\boldsymbol{U})f,f)=(u(\boldsymbol{U})f,f)=\int_0^{2\pi} u(e^{i\lambda})\, d(\boldsymbol{E}_\lambda f,f),$$

d'où les théorèmes de VON NEUMANN et de HEINZ résultent d'une manière évidente.

---

[5]) Les équations (1), et leurs analogues dans la suite, doivent être entendues dans le sens que les transformations figurant aux deux membres sont égales lorsqu'elles sont appliquées aux éléments de l'espace originel H.

[6]) Une représentation de type $T=\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$ a été démontrée déjà par P. R. HALMOS, mais la transformation unitaire $\boldsymbol{U}$ qu'il a construite ne satisfait pas aux équations (1) pour $k \geqq 2$. Voir son article: Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, 2 (1950), 125—134.

2. Passons à la démonstration du théorème I. Fixons un élément f de H. Puisque $|(T^k f, f)| \leqq \|f\|^2$, la fonction

$$F(z) = (f, f) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k (T^k f, f)$$

est holomorphe dans le domaine $|z| < 1$. Puisque

$$I + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k T^k = -I + 2 \sum_{k=0}^{\infty} z^k T^k = -I + 2(I - zT)^{-1} = (I + zT)(I - zT)^{-1},$$

on a, en posant $g = (I - zT)^{-1} f$,

$$F(z) = ((I + zT)g, (I - zT)g) = (g, g) + z(Tg, g) - \bar{z}(g, Tg) - z\bar{z}(Tg, Tg),$$

donc

$$\mathrm{Re}\, F(z) = \|g\|^2 - |z|^2 \|Tg\|^2 \geqq 0 \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

On peut alors appliquer un théorème de F. Riesz sur les fonctions holomorphes et de partie réelle positive dans le cercle unité [7]), en vertu duquel il existe une fonction de valeurs réelles et non-décroissante $\alpha(\lambda)$, $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$, telle que

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{i\lambda} z}{1 - e^{i\lambda} z}\, d\alpha(\lambda),$$

et que par conséquent

$$(2) \qquad (T^k f, f) = \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda}\, d\alpha(\lambda) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Il en vient aussi que

$$(2^*) \qquad (T^{*k} f, f) = (f, T^k f) = \overline{(T^k f, f)} = \int_0^{2\pi} e^{-ik\lambda}\, d\alpha(\lambda) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

On peut exiger que la fonction $\alpha(\lambda)$ soit continue de droite et qu'elle s'annule au point $\lambda = 0$; ainsi normée, elle sera déterminée d'une manière univoque par les équations (2) et (2*); nous la désignerons, mettant en évidence sa dépendance de f, par $\alpha(f; \lambda)$.

Cela étant, faisons correspondre à tout couple d'éléments f, g de H la fonction

$$\alpha(f, g; \lambda) = \frac{1}{4} [\alpha(f + g; \lambda) - \alpha(f - g; \lambda) + i\,\alpha(f + ig; \lambda) - i\,\alpha(f - ig; \lambda)].$$

---

[7]) F. Riesz, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, *Annales de l'École Normale Supérieure*, (3) **28** (1911), 33—62, en particulier p. 58—60. Cf. aussi G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis, *Berichte de Sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig*, **63** (1911), 501—511.

Comme il y a une relation analogue, pour toute transformation linéaire S, entre la forme bilinéaire (Sf, g) et la forme quadratique (Sf, f), il s'ensuit de (2) et (2*) que

$$(3) \qquad (T^k f, g) = \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda}\, d\alpha(f, g; \lambda), \quad (T^{*k} f, g) = \int_0^{2\pi} e^{-ik\lambda}\, d\alpha(f, g; \lambda)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les fonctions $\alpha(f, g; \lambda)$, étant continues de droite et s'annulant pour $\lambda = 0$, sont déterminées par les équations (3) d'une manière univoque ; on a donc en particulier $\alpha(f, f; \lambda) = \alpha(f; \lambda)$. Comme les membres gauches des équations (3) sont des formes bilinéaires symétriques (hermitiennes) en f, g, il en sera de même de $\alpha(f, g; \lambda)$, pour toute valeur fixée de λ. Comme de plus

$$0 \leqq \alpha(f; \lambda) \leqq \alpha(f; 2\pi) = \int_0^{2\pi} d\alpha(f; \mu) = (f, f)$$

(cas particulier $k = 0$ de (2)), la forme quadratique $\alpha(f; \lambda) = \alpha(f, f; \lambda)$ attachée à la forme bilinéaire $\alpha(f, g; \lambda)$ a, sur la sphère unité de l'espace H, les bornes inférieure et supérieure 0 et 1.

Donc il existe, pour tout λ fixé, $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$, une transformation autoadjointe bornée F_λ de H, telle que

$$(4) \qquad \alpha(f, g; \lambda) = (F_\lambda f, g)$$

pour tout $f, g \in H$, et que, par conséquent,

$$(5) \qquad F_\lambda \leqq F_\mu \quad \text{pour} \quad \lambda < \mu, \quad F_{\lambda+0} = F_\lambda, \quad F_0 = O, \quad F_{2\pi} = I.$$

Or un théorème de M. A. NAIMARK[8]) affirme que toute famille $\{F_\lambda\}$ de transformations autoadjointes bornées de l'espace H, jouissant des propriétés (5), peut être représentée sous la forme

$$F_\lambda = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 2\pi)$$

où $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ est une famille spectrale de projections orthogonales d'un certain espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ contenant l'espace originel H comme un sous-espace, et où $\boldsymbol{P}$ est la projection orthogonale sur H.

De (3) et (4) il résulte que

$$T^k = \boldsymbol{P} \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda, \quad T^{*k} = \boldsymbol{P} \int_0^{2\pi} e^{-ik\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

d'où l'on obtient les équations (1) avec la transformation unitaire

$$\boldsymbol{U} = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

---

[8]) М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. мат., 4 (1940), 227—309 (résumé en anglais: 309—318); Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, Доклады Акад. Наук СССР, 41 (1943), 373—375.

3. Le théorème obtenu a son analogue "continu" pour les familles de contractions T_t dépendant du paramètre réel $t \geqq 0$ et formant un semi-groupe (fortement) continu, c'est-à-dire telles que

$$T_0 = I,\quad T_{s+t} = T_s T_t,\quad T_s \to T_t \quad \text{pour} \quad s \to t.$$

Le voici:

Théorème II. *Si les contractions T_t $(0 \leqq t < \infty)$ de l'espace de Hilbert H forment un semi-groupe continu, il existe un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ contenant H comme un sous-espace, et un semi-groupe continu de transformations unitaires $\boldsymbol{U}_t$ de $\boldsymbol{H}$, de sorte que, en désignant par $\boldsymbol{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace H, on ait*

$$T_t = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_t \qquad (0 \leqq t < \infty). \tag{6}$$

Démonstration. $(T_t f, f)$ étant, pour f fixé, une fonction bornée et continue de t, on peut former, pour $\operatorname{Re} z > 0$, l'intégrale

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-tz}(T_t f, f)\, dt.$$

Il est connu[9]) que la valeur de cette intégrale est égale à

$$((zI - A)^{-1} f, f)$$

où A est la transformation "infinitésimale" attachée au semi-groupe $\{T_t\}$:

$$A = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t - I);$$

A est une transformation linéaire fermée, de domaine D_A dense dans H, et $(zI - A)^{-1}$ est une transformation partout définie et bornée pour $\operatorname{Re} z > 0$.

En posant

$$g = (zI - A)^{-1} f,$$

la fonction $F(z)$ peut donc être exprimée sous la forme

$$F(z) = (g, (zI - A)g) = \bar{z}(g, g) - (g, Ag) = \bar{z}(g, g) + \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g, (I - T_t)g),$$

d'où il vient que

$$\operatorname{Re} F(z) = (\operatorname{Re} z)\|g\|^2 + \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\|g\|^2 - \operatorname{Re}(g, T_t g)].$$

Or

$$|\operatorname{Re}(g, T_t g)| \leqq |(g, T_t g)| \leqq \|T_t\|\,\|g\|^2 \leqq \|g\|^2,$$

donc

$$\operatorname{Re} F(z) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Il est connu que toute fonction $F(z)$, holomorphe et de partie réelle non-négative dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, et pour laquelle

$$|x F(x + iy)| \leqq C \quad \text{pour} \quad x > 0, \tag{7}$$

---

[9]) Cf. E. Hille, *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948), p. 228—230.

peut être représentée sous la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - i\lambda}\, d\alpha(\lambda) \tag{8}$$

avec une fonction à valeurs réelles, non-décroissante et bornée $\alpha(\lambda)$.[10]) Comme, dans le cas que nous avons en vue, toutes ces conditions sont vérifiées, y compris, évidemment, la condition (7), nous avons la représentation (8). Vu que

$$\frac{1}{z - i\lambda} = \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{-tz}\, dt, \tag{9}$$

il résulte, par les théorèmes d'unicité pour les intégrales de Laplace, que

$$(T_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\alpha(\lambda).$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème I; on obtient les transformations unitaires $\boldsymbol{U}_t$ sous la forme

$$\boldsymbol{U}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\boldsymbol{E}_\lambda\,.$$

Remarquons que, grâce au théorème II, le théorème ergodique pour les semi-groupes continus de contractions et les analogues des théorèmes de von Neumann et de Heinz, qu'il est aisé de formuler, découlent des théorèmes correspondants pour les semi-groupes continus de transformations unitaires.

(Reçu le 30 juin 1953)

---

[10]) Cf. R. Nevanlinna, Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjes'sche Momentproblem, *Annales Academiae Sci. Fennicae,* (A) 18 (1922), N° 5; W. Cauer, The Poisson integral for functions with positive real part, *Bulletin American Math. Soc.,* 38 (1932), 714—717. Cf. aussi M. Tsuji, On positive definite sequences and functions, *Tôhoku Math. Journal,* (2) 2 (1950), 142—165.

Bibliographie

A. Ostrowski, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung zum Gebrauch bei akademischen Vorträgen sowie zum Selbststudium. Erster Band: Funktionen einer Variablen, XII + 373 S.; zweiter Band: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen, 482 S., Basel, Verlag Birkhäuser, 1945 und 1951.

Der Verfasser hat die recht schwierige Aufgabe unternommen, ein neues Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung zu schreiben, das fast allen denkbaren Ansprüchen genügt: als Leitfaden bei akademischen Vorlesungen dient, alle Einzelheiten dem Selbststudierenden klarmacht, den für die Anwendungen Interessierten rasch zur Behandlung des Kalküls führt und eine sichere Basis zu den weiteren Studien des jungen Mathematikers bietet. Im Bestreben diesen oft widersprechenden Forderungen zu entsprechen gibt er dem behandelten Stoffe eine von der üblichen in mehreren Punkten abweichende Anordnung, faßt die Gedankengänge — besonders im ersten Bande — sehr ausführlich und fügt zu jedem Kapitel eine Reihe von leichteren und schierigeren Aufgaben. Diese Umstände machen den verhältnismäßig erheblichen Umfang des Buches verständlich.

Nach einer Einleitung über das Wesen der Mathematik findet man die axiomatische Einführung der reellen Zahlen und einige Folgerungen aus den Axiomen, sowie einige Erläuterungen über den Funktionsbegriff. Dann folgt die Theorie der Grenzwerte, und zwar zuerst die des Grenzwerts von Zahlenfolgen und dann die des Grenzwerts von Funktionen. Nun wird der Begriff einer stetigen Funktion erklärt; die gleichmäßige Stetigkeit, die Existenz des Maximums und Minimums und der Satz von den Zwischenwerten werden ohne Beweis behauptet, die Beschränktheit wird aus der gleichmäßigen Stetigkeit gefolgert. Dann werden die grundlegenden Eigenschaften der aus der Geometrie als bekannt vorausgesetzten trigonometrischen Funktionen zusammengefaßt.

Das folgende Kapitel behandelt die Definition und die Eigenschaften des bestimmten Integrals von stetigen Funktionen; dann folgt die Einführung der Ableitung und der Zusammenhang zwischen beiden Operationen und erst im nächsten Kapitel lernen wir die Technik des Differenzierens, den Begriff der Umkehrfunktion, die Funktion $\sqrt[n]{x}$ und die Kettenregel kennen. Nun folgt ein Kapitel über die Technik des Integrierens, in welchem die Funktion $\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ und ihr Umkehrfunktion e^x eingeführt sind. Das letzte Kapitel des ersten Bandes enthält die Diskussion von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen und die Taylorsche Formel nebst der Potenzreihenentwicklungen elementarer Funktionen.

Der zweite Band beginnt mit einer mengentheoretischen Einführung, in welchem aus der abstrakten Mengenlehre der Begriff der Abzählbarkeit, aus der Theorie der Punktmengen im n-dimensionalen Raum aber verhältnismäßig viel behandelt wird. Es ist zu bedauern, daß statt beider üblichen Zeichen $\in$ und $\subset$ das Zeichen $\prec$ angewandt wird. Dann folgen die Begriffe des Grenzwerts und der Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen; die im ersten Bande ohne Beweis behaupteten Haupteigenschaften werden nun — unter allgemeineren Voraussetzungen — bewiesen. Das nächste Kapitel enthält die Theorie der numerischen und Funktionenreihen, besonders die der Potenzreihen und, als Anwendung, den Weierstrass'schen Approximationssatz. Im folgenden Kapitel über Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen steht leider der Stolz'sche Differenzierbarkeitsbegriff im Hintergrund, meist wird statt dessen die Stetigkeit der partiellen Ableitungen angenommen. Zu erwähnen ist die glückliche Anwendung des Begriffs der gleichmäßigen Differenzierbarkeit, der z. B. im Beweise des Young'schen Satzes über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen gute Dienste leistet und eine leichte Verallgemeinerung seiner üblichen Fassung ermöglicht.

Die übrigen Kapitel behandeln die Theorie der impliziten Funktionen und Funktionensysteme sowie der Extremen von Funktionen mehrerer Variablen, die numerischen Methoden der Interpolation, der Integration und der angenäherten Lösung von Gleichungen, endlich die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume und einiges aus der Flächentheorie.

Obwohl die Anordnung des Stoffes im Buche, besonders im ersten Bande, aus pädagogischen Gründen manchmal bestreitbar ist, stellt das Werk von Ostrowski einen bedeutenden Gewinn der mathematischen Literatur dar. Als seine Vorteile müssen wir in erster Linie die klaren und präzisen Definitionen, die ausführlichen Gedankengänge und vor allem die im großen Teil aus unpublizierten Aufgaben bestehende Aufgabensammlung erwähnen, die nicht nur dem Studierenden, sondern auch dem Fachmann recht viel Neues und Interessantes bietet. Man erwartet mit großem Interesse das Erscheinen des dritten Bandes.

Ákos Császár.

Leonard M. Blumenthal, Theory and applications of distance geometry, XI + 347 pages, Oxford, Clarendon Press, 1953.

Die Topologie, d. h. das Studium der Invarianten der homöomorphen Abbildungen entwickelte sich in unserem Jahrhundert zu einem fundamentalen Kapitel der Geometrie. Es wäre jedoch ganz unberechtigt neben den Invarianten der Homöomorphismen das Studium der Invarianten der isometrischen, d. h. abstandstreuen Abbildungen zu leugnen. Im Gegenteil, eben die Entwicklung der Topologie wies darauf hin, daß nur die gemeinsame Betrachtung der Invarianten isometrischer und homöomorpher Abbildungen den stufenweisen Aufbau der klassischen Geometrien im Rahmen des abstrakten Raumbegriffes ermöglicht. In seien Arbeiten: „Untersuchungen über allgemeine Metrik" und „Zur Metrik der Kurven" (*Math. Annalen,* **100** (1928), 75—163, **103** (1930), 466—501) hat K. Menger den Weg zur systematischen Untersuchung der isometrischen invarianten metrischer und halbmetrischer Räume gebahnt und auch einige wichtige Resultate erzielt. Darauf folgend entwickelte sich dieses Studium zu einem zusammenhängenden Kapitel der Geometrie, worüber schon früher einige zusammenfassende Arbeiten erschienen, wie die „Distance Geometries" (*The University of Missouri Studies,* **13** (1938), 1—142) des Verf., und „Les méthodes directes en géométrie différentielle" (*Actualités scientifiques et industrielles,* N° 886. Paris, 1941) von C. Pauc. Auch die wohlbekannten Untersuchungen von A. D. Alexandrow über konvexe Körper, oder die Arbeiten von K. Menger über Variationsrechnung stehen in engster Beziehung zu dieser Theorie.

Nach alledem kann man nur mit Freude begrüßen, daß sich Verf., dem ja dieses Kapitel der Geometrie manche Resultate verdankt, zur Veröffentlichung eines Werkes entschlossen hat, in welchem der heutige Stand der „Abstandsgeometrie" bis zu einem gewissen, selbst den Forscher interessierenden Grad samt Beweismethoden systematisch dargestellt werde.

Das Buch besteht aus vier Teilen. Der erste Teil (Metric Spaces) beschäftigt sich mit den Grundbegriffen, insbesondere mit dem abstrakt-metrischen Begriff der Konvexität und mit der metrischen Theorie der Kurven. Der zweite Teil (Euclidean and Hilbert Spaces) befaßt sich mit der isometrischen Einbettung halbmetrischer und metrischer Räume in den Euklidischen und Hilbertschen Raum. Im dritten Teil wird das analoge Einbettungsproblem in den elliptischen und hyperbolischen Raum behandelt. Im vierten Teil (Applications of Distance Geometry) werden Anwendungen der Abstandsgeometrie auf die Determinantentheorie, lineare Ungleichungen und Latticetheorie gebracht.

Verf. sucht sein Thema so darzustellen, daß das Verständnis des Stoffes auch für den Universitätshörer zugänglich sei. Die Beweise sind meistens genau durchgeführt und auch der Zusammenhang zwischen den ohne Beweis angeführten Sätzen ist oft durch gelungene Bemerkungen hergestellt. Es ist besonders zu begrüßen, daß Verf. das tiefere Eindringen in die Denkart der Abstandsgeometrie durch Beispiele und Übungsaufgaben unterstützt.

Trotz dieser Verdienste des Werkes sind sowohl die Stoffauswahl, wie auch die Darstellungsweise und die Litteraturangaben in mancher Hinsicht mangelhaft. Zuerst ist es nicht ganz begreiflich, weshalb Verf. die Verwendung topologischer Begriffe, wie Kontinuum, lokaler Zusammenhang, u. dgl. selbst dann vermeidet, wenn dadurch das Wesen des behandelten Stoffes verdeckt wird und der Zusammenhang mit bekannteren Teilen der Geometrie verloren geht. Diese konsequente Vermeidung der topologischen Begriffsbildungen verursacht dann eine recht einseitige Auswahl des Stoffes. So wird z. B. den von MENGER vermutete, aber erst neulich bewiesene fundamentale Satz, laut welchem ein lokal zusammenhängendes Kontinuum konvex metrisiert werden kann, auf S. 58 nur unter den „Supplementary Papers" ganz flüchtig erwähnt, obwohl die Konvexität der zentrale Begriff des ganzen Buches ist. Es ist ganz unverständlich, daß als Verfasser dieses Satzes nur R. H. BING erwähnt wird, E. E. MOISE dagegen überhaupt nicht, obwohl sein Beweis in demselben Heft des *Bulletin Amer. Math. Soc.* unmittelbar nach der BINGschen Arbeit gedruckt wurde. Es scheint ebenfalls nicht an der Stelle zu sein, den wichtigen Satz über die Einbettbarkeit der separablen metrischen Räume in das Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes auf S. 31 ohne Benennung von URYSOHN anzuführen. Referent ist der Meinung, daß der Name URYSOHN aus einem Buche, dessen alleiniges Thema der metrische Raum ist, kaum fehlen darf.

Die am besten gelungenen Teile des Buches sind die Kapitel IV—XII, in welchen die Einbettungsprobleme behandelt werden. Tatsächlich hat Verfasser — nebst MENGER — auf diesem Gebiet das Meiste geleistet und das ist vielleicht der Grund, daß er diese Teile am besten darzustellen vermochte. Weniger befriedigend ist die Stoffauswahl und die Darstellungsweise des Kapitels III über die metrische Theorie der Kurven. Zunächst wird die Theorie der metrischen Krümmung bis in die kleinsten Einzelheiten ausgeführt. Dem folgt ein kurzer, aber gut leserlicher Paragraph über die metrische Torsion. Hier bemüht sicht aber Verf. viel weniger, als bei der Behandlung der Krümmung, den Stand der Theorie und den Anteil der verschiedenen Autoren an ihrer Entstehung zu schildern. So z. B. wird der Satz, laut welchem zwei Bogen des dreidimensionalen E_3 isometrisch sind, wenn sie aufeinander derart längentreu abgebildet werden können, daß sie in entsprechenden Punkten dieselbe (nicht verschwindende) Krümmung und Torsion haben, nur in einer Fußnote auf S. 88, als von J. W. GADDUM in seiner Inauguraldissertation rein metrisch bewiesen, erwähnt. Ist der Beweis von GADDUM richtig, so sollte er im Buch wenigstens angedeutet sein, da dieser Satz für die Abstandsgeometrie der Kurven von großer Bedeutung ist; allerdings von viel größerer Bedeutung als ein im Text vorgeführter Satz von A. WALD, welcher zwar in der metrischen Theorie der Flächen eine große Rolle spielt, mit der Kurventheorie aber überhaupt nichts zu tun hat. Es ist auch merkwürdig, daß die wichtigen Resultate von E. EGERVÁRY über die n-te Bogenkrümmung ganz unbeachtet blieben, wodurch die Abstandsgeometrie der Kurven bedeutend ärmlicher ausschaut, als sie es in Wirklichkeit ist. Als weitere litterarische Unsicherheit des Verf. sei erwähnt, daß er auf S. 87 einen Satz J. W. SAWYER zuschreibt, obwohl der betreffende Satz sogar in weiterem Umfang schon viel früher in einer, auf. S. 88 vom Verf. selbst in anderem Zusammenhang zitierten Arbeit des Referenten bewiesen wurde.

Es kann auch nicht unbemerkt bleiben, daß die Definitionen des Buches unter einem recht sonderlichen Gesichtspunkt zusammengestellt wurden. Es ist z. B. merkwürdig, daß der Sinn eines so wohlbekannten Begriffes, wie "Topology" in der Definition 10.6 auf S. 31 eigens erklärt ist, wogegen der sehr wichtige Begriff der Konvexität nach Außen, auf welchem ja ein großer Teil des Werkes beruht, weder in den Definitionen, noch im

Sachregister zu finden ist, sondern nur im Text, auf S. 55 zwischen den Zeilen erklärt wird. Ähnliche Fälle, wo triviale Dinge hervorgehoben, recht wichtige aber ziemlich verwischt erscheinen, könnte man noch viele erwähnen.

Im Großen und Ganzen hat Verf. dadurch, daß er diesen, vielleicht noch nicht genügend bekannten Zweig der Geometrie darzustellen versuchte, gute Dienste geleistet und sein Buch kann, trotz der erwähnten Schwächen, mit Nutzen gelesen werden. Es ist nur Schade, daß die sehr einseitige Stoffauswahl und die unausgeglichene Darstellungsweise der Verbreitung dieser schönen geometrischen Theorie weit nicht so viel nützen wird, als sie es wegen ihrer Tiefe und Allgemeinheit verdienen würde.

G. Alexits.

Ludwig Schläfli, Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Band II, 381 Seiten. Herausgegeben vom Steiner—Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Basel, Verlag Birkhäuser, 1953.

Der Band fängt mit einer größeren Arbeit über die Auflösung eines Systems von algebraischen Gleichungen an, die SCHLÄFLI früh den Ruhm eines hervorragenden Mathematikers erwarb. In dieser Arbeit treten die typischen Züge, die SCHLÄFLIS Werke im allgemeinen charakterisieren, schon deutlich hervor, insbesondere das Bestreben nach einer natürlichen, das Wesen der Sache erfassenden Verallgemeinerung der Probleme und Ergebnisse. Der Arbeit ist ein ausführliches Nachwort von BURCKHARDT und VAN DER WAERDEN beigefügt.

Zwei weitere Abhandlungen enthalten Teilergebnisse seiner klassischen Theorie der vielfachen Kontinuität, die vor der Fertigstellung dieses großartigen Werkes veröffentlicht wurden. Die erste behandelt, an Untersuchungen von JACOBI anschließend, die Eigenschaften der geodätischen Linien eines Ellipsoids im n-dimensionalen Raum; die zweite bezieht sich auf die äußerst interessante Frage der Bestimmung des Inhaltes eines Tetraeders in Räumen konstanter Krümmung. Diese Frage hat schon GAUSS und J. BOLYAI beschäftigt, wurde aber erst durch LOBATSCHEFSKIJ bzw. SCHLÄFLI durch die Einführung und Diskussion der von ihnen bekannten Funktionen gelöst.

Die zu Lebzeiten SCHLÄFLIS veröffentlichten, hier abgedruckten Auszüge aus der Theorie der vielfachen Kontinuität enthalten den interessantesten Teil des gennanten Werkes, nämlich die Theorie der regulären Polytope, auf Grund der Schläflischen Funktionen. SCHLÄFLIS diesbezüglichen Untersuchungen wurden durch zahlreichen Mathematikern weitergeführt.

Weiter finden wir in diesem Band die beiden, durch die Berliner Akademie mit dem Steiner-Preis ausgezeichneten Abhandlungen über die Flächen dritter Ordnung mit der berühmten Konfiguration des Doppelsechsers und der Klassifikation dieser Flächen. Die übrigen Arbeiten des vorliegenden Bandes zeigen, daß SCHLÄFLI auch in der Analysis, in der Lehre der quadratischen Formen und in den Anwendungen der Determinantentheorie an die mehrdimensionale Geometrie tätig war.

Wir schauen mit Erwartung dem Erscheinen des dritten Bandes gegenüber, der uns zur Verschaffung eines vollständigen Bildes von SCHLÄFLIS Lebenswerk verhelfen wird.

L. Fejes Tóth.

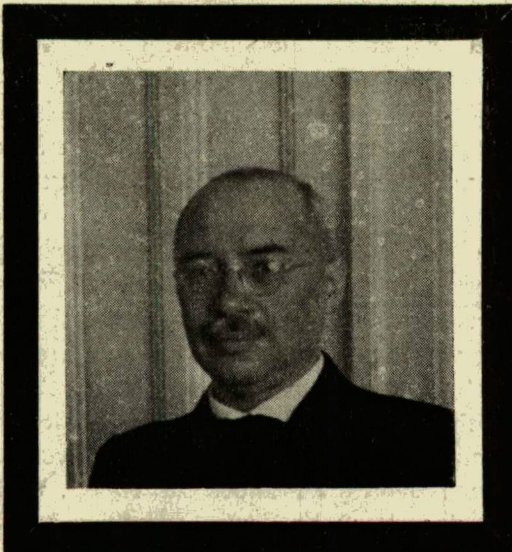
Engedélyezési szám: 876/T/47 VII. 23.

Formátum B/5. Terjedelem 7,7 A/5 ív. Példányszám 520.

Felelős szerk.: Szőkefalvi-Nagy Béla. Nyomdábaadás ideje: 1953. III. 28. Megjelenés: 1953. VIII. 15.

Kiadja a Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, II., Frankel Leó-u. 38—40. Kiadásért felel a Tankönyvkiadó vállalat vezérigazgatója.

Felelős vezető: Vincze György



GYULA SZŐKEFALVI-NAGY †

Die ungarische mathematische Wissenschaft hat einen schweren Verlust erlitten: am 14. Oktober 1953 ist Gyula (Julius) Szőkefalvi-Nagy nach langem Leiden aus dem Leben geschieden. In ihm haben unsere Acta um einen der Herausgeber und zugleich auch einen der ältesten und fleißigsten Mitarbeiter zu trauern. Er war seit 1934 korrespondierendes, seit 1946 ordentliches Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Gyula Sz.-Nagy ist am 11. April 1887 in Erzsébetváros in Siebenbürgen geboren, studierte von 1905 bis 1909 an der Universität Kolozsvár, wo er schon im Jahre 1909 promovierte. Im Schuljahr 1911/12 setzte er seine Studien an der Universität Göttingen als Stipendiat fort. Seine Universitätslaufbahn betritt er 1915, indem er sich an der Universität Kolozsvár aus Algebra und Funktionentheorie habilitierte. Zugleich wurde er zum Direktor der Handelsschule für Mädchen der Schulengruppe „Marianum" gewählt, an der er als Lehrer schon seit einigen Jahren wirkte. In diesem Amt verblieb er auch nach 1919, als die ungarische Universität die Stadt Kolozsvár verließ und zuerst nach Budapest und schließlich nach Szeged übersiedelte. Erst zehn Jahre später, zum Professor der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule in Szeged und später zu deren Direktor ernannt, konnte er seine Lehrtätigkeit an der Universität, wo die alten Kollegen wirkten, wieder aufnehmen. An derselben wurde er im Jahre 1939 als Nachfolger von Béla Kerékjártó zum Ordinarius der Geometrie berufen. Bald nachher aber wurde er im Jahre 1940 an die vom ungarischen Staat auf kurze Frist wiederaufgestellte Universität zu Kolozsvár versetzt, wo er mit aufopferndem Eifer seine durch den Krieg und die Übergangsverhältnisse beschwerte Lehrtätigkeit und wissenschaftliche Arbeit fortsetzte. Während dieser Periode hat er auch ein Buch über die Theorie der geometrischen Konstruktionen (in ungarischer Sprache) veröffentlicht. Vielleicht hat die damit und mit seiner gleichzeitig getragenen Dekanwürde verbundene Überausstrengung dazu beigetragen, daß er im Dezember 1943 von einer Apoplexie überfallen wurde, von der er zwar sich geistig vollkommen erholt wurde, die aber seine lebenslängliche halbseitige Lähmung verursacht und ihm mit einer Rezidive gedroht hat. Im September 1945, eigentlich schwer krank, doch voll mit unerschüttertem Arbeitslust, übersiedelt er wieder nach Szeged, um seine Lehrtätigkeit an der Universität, wo auch sein Sohn Béla wirkt, wieder aufzunehmen. Dort arbeitet er bis zum letzten Augenblick, hält seine Vorlesungen anfangs im nächstliegenden Universitätsgebäude, später wegen Verschlechterung seines Zustandes zu Hause, veröffentlicht noch 38 Arbeiten und bereitet eine erweiterte deutschsprachige Ausgabe seines Buches über die geometrischen Konstruktionen vor.

Gyula Sz.-Nagy war ein begeisterter Forscher der Geometrie von seltener Fruchtbarkeit. Insgesamt hat er 148. wissenschaftliche Arbeiten verfaßt, die sich alle mit Geometrie oder mit geometrisch interpretierbaren Problemen der Analysis und der klassichen Algebra beschäftigen. Seine feinsten Untersuchungen betreffen die geometrischen (topologischen) und arithmetischen Eigenschaften, ferner die Realitätsverhältnisse der algebraischen Kurven und Flächen; die (nicht notwendig algebraischen) Kurven und Flächen von maximalem Index und die von maximalem Klassenindex (ein von ihm am meisten befrüchtetes Forschungsgebiet); die Geometrie der konvexen Gebiete und Körper; die Theorie der geometrischen Konstruktionen und die Verteilungsfragen verschiedenster Art der Nullstellen von rationalen und transzendenten Funktionen.

Wir werden der ehrwürdigen Gestalt von Gyula Sz.-Nagy ein dankerfülltes Gedächtnis bewahren.

Die Redaktion.

On a lemma of Stieltjes on matrices.

By E. EGERVÁRY in Budapest.

Notations.

$a, b, c, \ldots$ scalars	$\mathbf{A}^* =$ transposed of $\mathbf{A}$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ column vectors	$\lvert\mathbf{A}\rvert =$ determinant of $\mathbf{A}$
$\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*, \ldots$ row vectors	$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle =$ diagonal matrix
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ matrices	$\mathbf{E} = \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle =$ unit matrix

In an article published in 1886,[1]) STIELTJES gave as a lemma a theorem amounting to the following:

Theorem I. *If the elements off the principal diagonal of the matrix of a positive definite quadratic form are all negative, then all the elements of the inverse of that matrix are positive.*

An extension of STIELTJES' remark to include not necessarily symmetric matrices has been made by J. L. MOSAK[2]) and H. E. GOHEEN[3]) in a lemma which amounts to the following:

Theorem II. *If*

α) all the principal minors of a matrix are positive, and

β) all the elements off its main diagonal are negative,

then all the elements of its inverse are positive.

MOSAK's and GOHEEN's proofs are founded on complete induction. In the present note we shall show that Theorem II can be proved directly by the use of the diadic representation of a matrix.[4])

---

[1]) T. J. STIELTJES, Sur les racines de l'equation $X_n = 0$, *Acta Math.*, 9 (1886), 385—400.

[2]) J. L. MOSAK, *General equilibrium theory in international trade* (Cowles Commission Monograph, 1944), 49—51.

[3]) H. E. GOHEEN, On a lemma of Stieltjes on matrices, *Amer. Math. Monthly*, 56 (1949), 328—329.

[4]) See also E. EGERVÁRY, On a property of the projector matrices and its application to the canonical reduction of matrix functions, *these Acta*, 15 (1953), 1—6.

If $\mathbf{A}$ satisfies the condition II α then $a_{11}>0$ and we have the following identity:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{11} \begin{vmatrix} 1 \\ a_{21}a_{11}^{-1} \\ \vdots \\ a_{n1}a_{11}^{-1} \end{vmatrix} \left[1, \frac{a_{12}}{a_{11}}, \ldots, \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right] =$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n} \\ a_{21}a_{2n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{n1}a_{n2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n} \\ a_{n1}a_{nn} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}' \end{vmatrix}.$$

It is easy to see that the matrix $\mathbf{A}'$ satisfies also the conditions of Theorem II. Indeed, the principal minors of $\mathbf{A}'$ can be deduced from those of $\mathbf{A}$ by multiplications and divisions[5]), and the elements off the main diagonal

$$a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} \qquad (i \neq j, i \geqq 2, j \geqq 2)$$

are in virtue of the conditions II α, β obviously negative.

We introduce the notation

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_{21}a_{11}^{-1} \\ \vdots \\ a_{n1}a_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -v_{21} \\ \vdots \\ -v_{n1} \end{bmatrix}; \quad \left[1, \frac{a_{12}}{a_{11}}, \ldots, \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right] = [1, -w_{12}, \ldots, -w_{1n}]$$

and emphasize that the first elements of these vectors are positive and all remaining are negative.

Applying now the same process of reduction to $\mathbf{A}'$ and so on we arrive finally to the following diadic representation of $\mathbf{A}$[4])

$$\mathbf{A} = q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -v_{21} \\ -v_{31} \\ \vdots \\ -v_{n1} \end{bmatrix} [1, -w_{12}, -w_{13}, \ldots, -w_{1n}] + q_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v_{32} \\ \vdots \\ -v_{n2} \end{bmatrix} [0, 1, -w_{23}, \ldots, -w_{2n}] +$$

$$+ \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ -v_{21} & 1 & \cdots 0 \\ -v_{31} & -v_{32} & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -v_{n1} & -v_{n2} & \cdots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 0\, 0 \cdots 0 \\ 0\, q_2 0 \cdots 0 \\ 0\, 0\, q_3 \cdots 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 0\, 0\, 0 \cdots q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -w_{12} & -w_{13} \cdots & -w_{1n} \\ 0 & 1 & -w_{23} \cdots & -w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (\mathbf{E}-\mathbf{M})\langle q_1, \ldots, q_n \rangle (\mathbf{E}-\mathbf{N}),$$

---

5) E. Pascal, *Die Determinanten* (Leipzig, 1900), 38—41.

where

$$q_1 = a_{11}; \quad q_k = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{kk} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{k-1,k-1} \end{vmatrix} \qquad (k = 2, 3, \dots, n)$$

and where all the elements q_k, r_{ij}, w_{ij} are positive.

Now we have

$$\mathbf{A}^{-1} = \{(\mathbf{E}-\mathbf{M})\langle q_1, \dots, q_n\rangle(\mathbf{E}-\mathbf{N})\}^{-1} = (\mathbf{E}-\mathbf{N})^{-1}\langle q_1, \dots, q_n\rangle^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{M})^{-1}.$$

But $\mathbf{M}$ and $\mathbf{N}$ are nilpotent matrices with positive elements and such that $\mathbf{M}^n = 0$, $\mathbf{N}^n = 0$, hence

$$(\mathbf{E}-\mathbf{M})^{-1} = \mathbf{E}+\mathbf{M}+\cdots+\mathbf{M}^{n-1},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{E}+\mathbf{N}+\cdots+\mathbf{N}^{n-1})\langle q_1^{-1}, q_2^{-1}, \dots, q_n^{-1}\rangle(\mathbf{E}+\mathbf{M}+\cdots+\mathbf{M}^{n-1}).$$

The above expression clearly shows that $\mathbf{A}^{-1}$ is the product of two oppositely situated triangular matrices with positive elements and of a diagonal matrix with positive elements, consequently all the elements of $\mathbf{A}^{-1}$ are positive.

Some known results concerning the rigidity-matrix of a system of elastically connected particles suggest that the conditions of Theorem II can be replaced by weaker ones.

For example if the system is a string of n equal and equidistant particles with fastened ends, then the corresponding rigidity-matrix is[6])

$$(*) \qquad \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{A}_n| = n+1,$$

and all the elements of its inverse[7])

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix} 1.n & 1(n-1) & \cdots & 1.2 & 1.1 \\ 1(n-1) & 2(n-1) & \cdots & 2.2 & 2.1 \\ 1(n-2) & 2(n-2) & \cdots & 3.2 & 3.1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1.1 & 2.1 & \cdots & (n-1)1 & n.1 \end{bmatrix}$$

are positive. This result is however physically plausible, being a finite counterpiece to the wellknown theorem about the positivity of GREEN's function belonging to a continuous string.

As an extension of Theorem II to include such matrices as (*) we shall prove now the following

---

[6]) See f. i. E. J. ROUTH, *Advanced Dynamics*, Part II (1884), 226—228.

[7]) R. MISES—PH. FRANK, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik u. Physik* (Braunschweig, 1930) I. Teil, 502—503.

Theorem III. *Suppose that*

α) the principal minors of an n-th order matrix $\mathbf{A}_n$, *i. e.*

$$|\mathbf{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1k} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{k1}\, a_{k2} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

are positive,

β) all the elements off its main diagonal are nonpositive,

γ) each column in the triangle above the diagonal and each row in the triangle under the diagonal contains at least one negative element.

Then all the elements of its inverse are positive.

Inasmuch

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{|\mathbf{A}_2|} & -\dfrac{a_{12}}{|\mathbf{A}_2|} \\ -\dfrac{a_{21}}{|\mathbf{A}_2|} & \dfrac{a_{11}}{|\mathbf{A}_2|} \end{bmatrix},$$

the theorem is obviusly true for second order matrices satisfying the conditions III α, β, γ. Assume now that the theorem is true for any n—1-th order matrix satisfying the conditions III α, β, γ, and consider the following partitioned form of an n-th order matrix

$$\mathbf{A}_n = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1n} \\ \hdashline a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right] = \left|\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{v}_n \\ \hdashline \mathbf{w}_n^* & a_{nn} \end{array}\right|$$

as well as its inverse[8])

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{n-1}^{-1} + \dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n\mathbf{w}_n^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & -\dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n \\ \hdashline -\dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{w}_n^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & \dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|} \end{array}\right].$$

For sake of brevity let us introduce the notation $\mathbf{A} \succ 0$, if all the elements of $\mathbf{A}$ are positive. Obviously $\mathbf{A} \succ 0$, $\mathbf{B} \succ 0$ imply $\mathbf{A} + \mathbf{B} \succ 0$ and $\mathbf{A}\mathbf{B} \succ 0$.

We have by hypothesis

$$\mathbf{A}_{n-1}^{-1} \succ 0,$$

hence, by conditions β, γ,

$$-\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n \succ 0, \quad -\mathbf{w}_n^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} \succ 0$$

---

8) See f. i. R. A. Fraser, W. J. Duncan and A. R. Collar, *Elementary Matrices* (Cambridge, 1938), 112—115.

and by condition α

$$\frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|} > 0,$$

consequently all the elements in each block of $\mathbf{A}_n^{-1}$ are positive. Q. e. d.

Note. After completion of the present paper the writer became acquainted with a paper of G. DE RHAM: Sur un théorème de Stieltjes relatif à certaines matrices, *Acad. Serbe des Sciences, Publications de l'Institut Math.*, **4** (1952), 133—134. Despite the fact that titles and topics are nearly identical, there is little overlap in content (only in the case of symmetrical matrices), and none in method.

(Received June 16, 1953.)

Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1. Introduction.

Dans une Note récente [1]) je viens de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème I. *Si T est une contraction de l'espace de Hilbert complexe H,* [2]) *il existe un espace de Hilbert complexe $\mathbf{H}$ contenant H comme un sous-espace, et une transformation unitaire $\mathbf{U}$ de $\mathbf{H}$, de sorte que, en désignant par $\mathbf{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace H, on ait*

$$T^k = \mathbf{P}\mathbf{U}^k, \quad (T^*)^k = \mathbf{P}\mathbf{U}^{-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$ [3])

Théorème II. *Si les contractions T_t $(0 \leqq t < \infty)$ de l'espace de Hilbert complexe H forment un semi-groupe (fortement) continu de transformations, c'est-à-dire que*

$$T_0 = I, \quad T_s T_t = T_{s+t}, \quad T_s \to T_t \text{ pour } s \to t,$$

il existe un espace de Hilbert complexe $\mathbf{H}$ contenant H comme un sous-espace, et un semi-groupe (fortement) continu de transformations unitaires $\mathbf{U}_t$ de $\mathbf{H}$, de sorte que, en désignant par $\mathbf{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace H, on ait

$$T_t = \mathbf{P}\mathbf{U}_t, \quad T_t^* = \mathbf{P}\mathbf{U}_t^{-1} \qquad (0 \leqq t < \infty).$$ [4])

Dans la démonstration de ces théorèmes j'ai fait usage de certains théorèmes des moments, d'un théorème de NEUMARK sur les familles spectrales

---

[1]) BÉLA SZ.-NAGY, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *ces Acta*, 15 (1953), 87—92.

[2]) Par contraction nous entendons une transformation linéaire qui n'augmente pas les normes.

[3]) Ces équations, et leurs analogues dans la suite, doivent être entendues dans le sens que les transformations figurant aux deux membres sont égales lorsqu'elles sont appliqués aux éléments de l'espace originel H.

[4]) Dans le cas particulier des transformations T_t *isométriques*, ce théorème a été démontré déjà par J. L. B. COOPER dans son article: One-parameter semigroups of isometric operators in Hilbert space, *Annals of Math.*, 48 (1947), 827—842.

généralisées, et de théorèmes de HILLE sur la transformation "infinitésimale"

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T_h - I)$$

du semi-groupe $\{T_t\}$, et sur sa résolvante $(zI - A)^{-1}$.

Dans la Note présente je vais donner une démonstration qui ne fait usage d'aucun des théorèmes mentionnés et qui de plus sera valable aussi pour des espaces de Hilbert *réels* [5]). Dans le théorème II, il nous suffira de supposer que T_t est une fonction *faiblement* continue de t; nous obtiendrons alors U_t aussi en fonction faiblement continue de t, mais comme U_t est unitaire, cela entraîne sa continuité forte [6]), et de la représentation trouvée il s'ensuivra que T_t est aussi fonction fortement continue de t. [7])

Nous montrerons de plus que, dans ces théorèmes, on peut exiger que $\boldsymbol{H}$ soit *minimal* dans le sens qu'il soit sous-tendu, selon les cas, par les éléments de la forme $\boldsymbol{U}^k f$ $(f \in H; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ et par les éléments de la forme $\boldsymbol{U}_t f$ ou $\boldsymbol{U}_t^* f$ $(f \in H; t \geqq 0)$. Dans ce cas, $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{U}$, respectivement $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{U}_t$, sont *déterminés* à une isomorphie près.

Notre démonstration passera par un théorème sur des transformations qui sont fonctions de type positif, définies sur un groupe.

D é f i n i t i o n. Nous dirons que la transformation linéaire bornée T de l'espace de Hilbert H (réel ou complexe), dépendant de l'élément variable γ d'un groupe Γ, est une *fonction de type positif* sur Γ, si l'on a

$$(1) \qquad \sum_{\delta, \gamma \in \Gamma} (T_{\delta^{-1}\gamma} g_\gamma, g_\delta) \geqq 0$$

pour toute famille $\{g_\gamma\}$ d'éléments de H telle que $g_\gamma = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments γ de Γ au plus, et si de plus

$$(2) \qquad T_{\gamma^{-1}} = T_\gamma^*.$$ [8])

T h é o r è m e III. *Supposons que la transformation linéaire bornée T_γ de l'espace de Hilbert H (réel ou complexe) est une fonction de type positif de l'élément variable γ d'un groupe topologique Γ, et que cette fonction est faiblement continue, c'est-à-dire que $(T_\gamma f, g)$ est, pour tout couple fixé f, g d'éléments de H, fonction continue de γ; de plus soit*

$$(3) \qquad T_\varepsilon = I \quad (\varepsilon \text{ est l'élément unité du groupe } \Gamma).$$

---

[5]) Dans l'espace de Hilbert réel, ainsi que dans celui complexe, nous appellerons *unitaire* une transformation linéaire isométrique qui transforme l'espace sur l'espace tout entier.

[6]) En effet, si $t \to s$, on a

$$\|U_t f - U_s f\|^2 = 2\|f\|^2 - (U_t f, U_s f) - (U_s f, U_t f) \to 2\|f\|^2 - 2(U_t f, U_s f) = 0.$$

[7]) Cf. E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948), Theorem 9. 4. 1, p. 189.

[8]) Dans un espace H complexe, (2) est une conséquence de (1).

Alors il existe, dans un certain espace de Hilbert $\mathbf{H}$ *contenant* H *comme sous-espace, une famille* $\{U_\gamma\}$ *de transformations unitaires formant une représentation (fortement) continue du groupe* Γ, *telle qu'on ait*

$$T_\gamma = \mathbf{P} U_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma) \tag{4}$$

où $\mathbf{P}$ *désigne la projection orthogonale sur le sous-espace* H. *De plus on peut exiger que* $\mathbf{H}$ *soit minimal dans le sens qu'il soit sous-tendu par les éléments de la forme* $U_\gamma f$ $(f \in H; \gamma \in \Gamma)$; *dans ce cas* $\mathbf{H}$ *et* U_γ *sont déterminés à une isomorphie près.*

Ce théorème peut être regardé comme une généralisation d'un théorème de GELFAND et RAÏKOV[9]) affirmant que pour toute fonction $p(\gamma)$, à valeurs *numériques*, définie sur le groupe topologique Γ, continue et de type positif dans le sens ordinaire, il existe une représentation continue de Γ par des transformations unitaires U_γ d'un certain espace de Hilbert H, de sorte qu'on ait

$$p(\gamma) = (U_\gamma f_0, f_0)$$

où f_0 est un élément fixé de H; on peut exiger que H soit sous-tendu par les éléments $U_\gamma f_0$ $(\gamma \in \Gamma)$, H et U_γ sont alors déterminés à une isomorphie près.

Les théorèmes I et II dérivent, moyennant deux lemmes, du théorème III, en y prenant pour Γ, selon les cas, le groupe additif des nombres entiers avec la topologie discrète, ou le groupe additif des nombres réels avec sa topologie naturelle.

Nous montrerons comment le théorème de NEUMARK dérive du théorème III, et dans le dernier paragraphe nous démontrerons une extension partielle du théorème I au cas des contractions d'un espace de Banach quelconque.

2. Deux lemmes.

Lemme 1. *Soit* T *une contraction de l'espace de Hilbert* H *(réel ou complexe). En posant*

$$T_n = T^n \ (n = 0, 1, \ldots), \quad T_n = (T^*)^{|n|} \ (n = -1, -2, \ldots),$$

nous obtenons une suite de transformations, infinie dans les deux sens, telle que $T_{-n} = T_n^*$, $T_0 = I$, *et jouissant de la propriété que*

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} (T_{n-m} g_n, g_m) \geqq 0 \tag{5}$$

pour toute suite $\{g_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *d'éléments de* H *telle que* $g_n = 0$ *sauf pour un nombre fini d'indices* n *au plus; donc* T_n *est une fonction de type positif sur le groupe additif des entiers* n.

---

[9]) Cf. I. GELFAND—D. RAÏKOV, Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups, *Recueil math. (Mat. Sbornik)*, N. S. 13 (1943), 301—316 (en russe, avec un résumé en anglais); cf. aussi R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Transactions American Math. Soc.*, 63 (1948), 1—84, en particulier 21—22.

Démonstration. Envisageons d'abord le cas d'un espace H *complexe*. Posons, pour $0 \leqq r < 1$ et $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$,

$$T(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} T_n;$$

vu que $\|T_n\| \leqq 1$, cette série converge en norme. En posant $z = re^{i\theta}$ on voit que

$$T(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) + \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n T^{*n}\right) =$$
$$= 2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) = \operatorname{Re}(I + zT)(I - zT)^{-1}.[10]$$

Par conséquent on a, en posant

$$g = (I - zT)^{-1} f,$$

$$(T(r, \theta)f, f) = \operatorname{Re}((I + zT)(I - zT)^{-1} f, f) = \operatorname{Re}((I + zT)g, (I - zT)g) =$$
$$= \operatorname{Re}[(g, g) + z(Tg, g) - \bar{z}(g, Tg) - z\bar{z}(Tg, Tg)] =$$
$$= \|g\|^2 - |z|^2 \|Tg\|^2 \geqq 0,$$

puisque $|z| < 1$ et $\|T\| \leqq 1$. Comme cela est vrai pour tous les éléments f de H, on a en particulier

(6) $$p(r, \theta) = (T(r, \theta) g(\theta), g(\theta)) \geqq 0$$

où

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} g_n,$$

$\{g_n\}$ étant une suite d'éléments de H telle que $g_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices n au plus. En introduisant les séries de $T(r, \theta)$ et de $g(\theta)$, on voit que

$$p(r, \theta) = \sum_{k, m, n = -\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{i(k+m-n)\theta} (T_k g_n, g_m) =$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\theta} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} r^{|l+n-m|} (T_{l+n-m} g_n, g_m),$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \theta)\, d\theta = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} r^{|n-m|} (T_{n-m} g_n, g_m).$$

En vertu de l'inégalité (6) on a donc

$$\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} r^{|n-m|} (T_{n-m} g_n, g_m) \geqq 0.$$

Faisant tendre r vers 1, il en résulte l'inégalité (5). C. q. f. d.

---

[10]) On pose, pour une transformation linéaire A quelconque, $\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*)$. On a alors $((\operatorname{Re} A)f, f) = \frac{1}{2}[(Af, f) + (f, Af)] = \operatorname{Re}(Af, f)$.

Le cas d'un espace H *réel* peut être réduit à celui d'un espace complexe, et cela en introduisant l'espace H_c des couples $\{g, h\}$ d'éléments de H, muni des opérations fondamentales suivantes:

$$\{g, h\}+\{g', h'\}=\{g+g', h+h'\},$$
$$(a+ib)\{g, h\}=\{ag-bh, bg+ah\} \qquad (a \text{ et } b\text{: nombres réels}),$$
$$(\{g, h\}, \{g', h'\})=(g, g')+(h, h')+i(h, g')-i(g, h'),$$
$$\|\{g, h\}\|^2=(\{g, h\}, \{g, h\})=\|g\|^2+\|h\|^2;$$

H_c est un espace de Hilbert complexe. La transformation

$$\overline{T}\{g, h\}=\{Tg, Th\}$$

est alors une contraction de H_c; on a évidemment $\overline{T}^*\{g, h\}=\{T^*g, T^*h\}$, donc aussi

$$\overline{T}_n\{g, h\}=\{T_ng, T_nh\} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Or l'inégalité (4) étant démontrée déjà pour les espaces complexes, on aura

$$\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} (\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m) \geqq 0$$

pour $\varphi_n=\{g_n, h_n\}$ (g_n et h_n s'annulant sauf pour un nombre fini d'indices n au plus). Si $h_n=0$ pour tous les n, on a

$$\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} (\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m)=\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} (T_{n-m}g_n, g_m),$$

ce qui achève la démonstration de (5) aussi dans le cas d'un espace H réel.

L e m m e 2. *Soit $\{T_t\}$ $(0 \leqq t<\infty)$ une famille de contractions de l'espace de Hilbert H (réel ou complexe), formant un semi-groupe faiblement continu, c'est-à-dire supposons que*

$$T_0=I, \quad T_sT_t=T_{s+t} \qquad (s, t \geqq 0)$$

et que (T_tf, g) est une fonction continue de t $(0 \leqq t<\infty)$, quels que soient les éléments fixés f et g de H. Alors, en posant

$$T_t=T^*_{-t} \quad \textit{pour} \quad t<0,$$

T_t sera une fonction faiblement continue sur la droite $-\infty<t<\infty$, de plus on aura

$$\sum_{s, t=-\infty}^{\infty} (T_{t-s}g_t, g_s) \geqq 0$$

pour toute famille $\{g_t\}$ $(-\infty<t<\infty)$ d'éléments de H telle que $g_t=0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de t au plus; T_t sera donc une fonction faiblement continue et de type positif sur le groupe additif des nombres réels.

D é m o n s t r a t i o n. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_N$ les valeurs de t pour lesquelles $g_t \neq 0$. Choisissons les nombres rationnels

$$t_{r\nu} \qquad (r=1, 2, \ldots, N; \ \nu=1, 2, \ldots)$$

de façon que

$$t_r = \lim_{\nu\to\infty} t_{r\nu} \qquad (r=1,2,\dots,N).$$

Puisque T_t est une fonction faiblement continue de t $(-\infty<t<\infty)$, on aura, en posant $f_r = g_{t_r}$ $(r=1,2,\dots,N)$,

$$(7) \qquad \sum_{s,t=-\infty}^{\infty}(T_{t-s}g_t,g_s) = \sum_{m,n=1}^{N}(T_{t_n-t_m}f_n,f_m) = \lim_{\nu\to\infty}\sum_{m,n=1}^{N}(T_{t_{n\nu}-t_{m\nu}}f_n,f_m).$$

Pour ν fixé, les nombres rationnels $t_{r\nu}$ $(r=1,\dots,N)$ sont commensurables, c'est-à-dire qu'on peut les écrire sous la forme

$$t_{r\nu} = \tau_{r\nu}d_\nu$$

avec un $d_\nu>0$ et des entiers $\tau_{r\nu}$. On a alors

$$T_{t_{n\nu}-t_{m\nu}} = (T_{d_\nu})^{\tau_{n\nu}-\tau_{m\nu}} \text{ pour } \tau_{n\nu}\geqq\tau_{m\nu}, \text{ et } =(T^*_{d_\nu})^{\tau_{m\nu}-\tau_{n\nu}} \text{ pour } \tau_{n\nu}\leqq\tau_{m\nu},$$

donc

$$(8) \qquad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(T_{t_{n\nu}-t_{m\nu}}f_n,f_m) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(T^{(\nu)}_{\tau_{n\nu}-\tau_{m\nu}}f_n,f_m)$$

où $T^{(\nu)} = T_{d_\nu}$. Or, puisque $T^{(\nu)}$ est une contraction, il s'ensuit du lemme 1 que le second membre de (8) est non-négatif, et alors, grâce à (7), on aura aussi

$$\sum_{s,t=-\infty}^{\infty}(T_{t-s}g_t,g_s)\geqq 0. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

En vertu de ces deux lemmes, les théorèmes I et II sont des conséquences du théorème III. Nous allons démontrer celui-ci dans le paragraphe suivant.

3. Démonstration du théorème III.

Désignons par $\boldsymbol{F}$ l'ensemble des familles

$$\mathfrak{f} = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

d'éléments $f_\gamma\in H$; nous appellerons f_γ le composant d'indice γ de $\mathfrak{f}$, et nous écrirons

$$f_\gamma = (\mathfrak{f})_\gamma.$$

En écrivant $\mathfrak{f}=0$ si et seulement si $f_\gamma=0$ pour tous les γ, et en définissant l'addition et la multiplication par des scalaires c (réels ou complexes suivant que H est réel ou complexe) par

$$\{f_\gamma\}+\{f'_\gamma\}=\{f_\gamma+f'_\gamma\}, \quad c\{f_\gamma\}=\{cf_\gamma\},$$

$\boldsymbol{F}$ devient un ensemble vectoriel (réel ou complexe, selon les cas).

Envisageons le sous-ensemble $\boldsymbol{H}_0$ de $\boldsymbol{F}$, évidemment linéaire, des $\mathfrak{f}=\{f_\gamma\}$ pour lesquels il existe un $\mathfrak{g}=\{g_\gamma\}\in\boldsymbol{F}$, n'ayant qu'un *nombre fini de composants g_γ non nuls,* et tel qu'on ait

$$f_\gamma = \sum_{\delta\in\Gamma} T_{\gamma^{-1}\delta}\,g_\delta$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$; nous écrirons alors:

$$\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}.$$

Dans $\boldsymbol{H}_0$, nous définissons une forme binaire qui aura, nous le montrerons, toutes les propriétés d'un produit scalaire; soit notamment, pour $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$,

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_{\gamma} (f_\gamma, g'_\gamma) = \sum_{\gamma, \delta} (T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta, g'_\gamma) = \tag{9}$$

$$= \sum_{\gamma, \delta} (g_\delta, T_{\delta^{-1}\gamma} g'_\gamma) = \sum_{\delta} (g_\delta, f'_\delta) \tag{10}$$

(on a fait usage ici de ce que $T_{\alpha^{-1}} = T^*_\alpha$). De (9) on voit que $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ ne dépend pas du choix particulier de $\mathfrak{g}$ dans la représentation de $\mathfrak{f}$, et de (10) on voit qu'il ne dépend pas du choix particulier de $\mathfrak{g}'$, donc il est entièrement déterminé par $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$. On voit de plus que, dans le cas réel, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ est une forme bilinéaire, symétrique en $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$, tandis que dans le cas complexe elle est linéaire en , conjuguée-linéaire en $\mathfrak{f}'$, et hermitienne: $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \overline{(\mathfrak{f}', \mathfrak{f})}$. Enfin, T_γ étant une fonction de type positif de γ (cf. (1)), on a

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \geqq 0.$$

Il ne reste donc qu'à montrer que le signe d'égalité n'est valable ici que si $\mathfrak{f} = 0$. Or il s'ensuit des propriétés déjà établies de $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ que l'inégalité de Schwarz est vérifiée:

$$|(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')|^2 \leqq (\mathfrak{f}, \mathfrak{f})(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}').$$

En vertu de celle-ci, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = 0$ entraîne $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 0$ pour tous les $\mathfrak{f}' \in \boldsymbol{H}_0$. En choisissant en particulier $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$ de sorte que tous les composants de $\mathfrak{g}'$ s'annulent sauf celui d'indice α, il résulte que

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = (f_\alpha, g) = 0$$

où $f_\alpha = (\mathfrak{f})_\alpha$, et où $g = (\mathfrak{g}')_\alpha$ peut être un élément quelconque de H. Par conséquent $f_\alpha = 0$; et comme cela est vrai pour tout α, il résulte que $\mathfrak{f} = 0$.

La forme $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ jouissant donc de toutes les propriétés d'un produit scalaire, $\boldsymbol{H}_0$ est un espace de Hilbert, en général incomplet, par rapport à ce produit scalaire. Soit $\boldsymbol{H}$ le complété de $\boldsymbol{H}_0$.

L'espace originel H peut être regardé comme un sous-espace fermé de $\boldsymbol{H}$, voire même de $\boldsymbol{H}_0$, et cela en identifiant l'élément $f \in H$ avec l'élément $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$ pour lequel $(\mathfrak{g})_\varepsilon = f$ et $(\mathfrak{g})_\gamma = 0$ $(\gamma \neq \varepsilon)$, c'est-à-dire en identifiant

$$f \in H \quad \text{avec} \quad \mathfrak{f} = \{T_{\gamma^{-1}} f\} \in \boldsymbol{H}_0.$$

Cela est légitimé par le fait que, pour deux éléments quelconques f et f' de H, et pour les éléments $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ de $\boldsymbol{H}_0$ qu'on leur a fait correspondre, on a

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = (f, f').$$

Calculons la projection orthogonale $\boldsymbol{P}\mathfrak{f}$ d'un élément $\mathfrak{f} \in \boldsymbol{H}_0$ sur le sous-espace fermé H de $\boldsymbol{H}$! Comme on doit avoir, pour tous les $h \in H$,

$$(\boldsymbol{P}\mathfrak{f}, h) = (\mathfrak{f}, h),$$

donc

$$(P\mathfrak{f}, h) = ((\mathfrak{f})_\varepsilon, h),$$

on a nécessairement

(11) $$P\mathfrak{f} = (\mathfrak{f})_\varepsilon.$$

α étant un élément donné de Γ, posons

$$U_\alpha\{f_\gamma\} = \{f_{\alpha^{-1}\gamma}\};$$

c'est une transformation de H_0 en H_0, puisque si $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, on a

$$f_{\alpha^{-1}\gamma} = \sum_\delta T_{\gamma^{-1}\alpha\delta}\, g_\delta = \sum_\eta T_{\gamma^{-1}\eta}\, g_{\alpha^{-1}\eta},$$

donc $U_\alpha \mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}^\alpha$ avec $\mathfrak{g}^\alpha = \{g_{\alpha^{-1}\gamma}\}$. U_α transforme H_0 en H_0 tout entier, et cela évidemment d'une manière linéaire et biunivoque. De plus, U_α est *isométrique:* si $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, on a

$$(U_\alpha \mathfrak{f}, U_\alpha \mathfrak{f}') = \sum_\gamma (f_{\alpha^{-1}\gamma}, g'_{\alpha^{-1}\gamma}) = \sum_\eta (f_\eta, g'_\eta) = (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}').$$

U_α se prolonge alors par continuité en une transformation isométrique de l'espace H sur l'espace H tout entier, donc en une transformation unitaire de H.

On a évidemment

$$U_\varepsilon = I, \quad U_\alpha U_\beta = U_{\alpha\beta},$$

d'abord dans H_0, et alors aussi en H. Les U_α forment donc une représentation unitaire du groupe Γ. Cette représentation est faiblement continue, c'est-à-dire que

(12) $$(U_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$$

est une fonction continue de α, quels que soient les éléments $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ fixés de H. Vu que H_0 est dense dans H et que les U_α sont uniformément bornées (par 1), il suffit d'envisager les éléments de H_0. Or, si $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, on a

$$(U_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_{\delta, \gamma} (T_{\gamma^{-1}\alpha\delta}\, g_\delta, g'_\gamma),$$

et tous les termes non nuls (en nombre fini) du second membre sont des fonctions continues de α en vertu de notre hypothèse que T_γ est une fonction faiblement continue sur le groupe topologique Γ. La continuité faible de U_α entraîne sa continuité forte, cf. [6]).

Pour $\mathfrak{f} \in H_0$ on a, en vertu de (11),

$$PU_\alpha \mathfrak{f} = (U_\alpha \mathfrak{f})_\varepsilon = (\mathfrak{f})_{\alpha^{-1}}.$$

En particulier, si $\mathfrak{f} = f \in H$, c'est-à-dire que $\mathfrak{f} = \{T_{\gamma^{-1}} f\}$, on a donc

$$PU_\alpha f = T_\alpha f.$$

Cela achève la démonstration de ce qu'une représentation de type (4) existe. De plus, on a pour $g \in H$

$$U_\alpha g = U_\alpha\{T_{\gamma^{-1}} g\} = \{T_{\gamma^{-1}\alpha} g\},$$

d'où il s'ensuit que, pour $\mathfrak{f}=\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}=\{g_\gamma\}$, on a

$$(\mathfrak{f})_\gamma=\sum_\delta T_{\gamma^{-1}\delta}g_\delta=\sum_\delta (U_\delta g_\delta)_\gamma=\Big(\sum_\delta U_\delta g_\delta\Big)_\gamma,$$

donc $\mathfrak{f}=\sum_\delta U_\delta g_\delta$. Par conséquent, $\mathbf{H}_0$ et alors $\mathbf{H}$ sont sous-tendus par les éléments de la forme $U_\delta g$ $(g\in H,\ \delta\in\Gamma)$, c'est-à-dire que l'espace $\mathbf{H}$ que nous avons construit est *minimal*.

Envisageons maintenant deux représentations unitaires de Γ, U'_γ dans $\mathbf{H}'$ et U''_γ dans $\mathbf{H}''$, telles que $\mathbf{H}'\supset H$, $\mathbf{H}''\supset H$ et que, dans H,

$$T_\gamma=P'U'_\gamma,\quad T_\gamma=P''U''_\gamma;$$

supposons de plus que chacun des espaces $\mathbf{H}', \mathbf{H}''$ est minimal, c'est-à-dire que $\mathbf{H}'$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U'_\gamma f$, et $\mathbf{H}''$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U''_\gamma f$ $(f\in H)$. On a, pour $\Phi'=\sum_\gamma U'_\gamma f_\gamma$ et $\Psi'=\sum_\gamma U'_\gamma g_\gamma$ $(f_\gamma, g_\gamma\in H)$,

$$(\Phi',\Psi')=\sum_{\gamma,\delta}(U'_\gamma f_\gamma, U'_\delta g_\delta)=\sum_{\gamma,\delta}(U'_{\delta^{-1}}U'_\gamma f_\gamma, P'g_\delta)=\sum_{\gamma,\delta}(P'U'_{\delta^{-1}\gamma}f_\gamma, g_\delta)=$$
$$=\sum_{\gamma,\delta}(T_{\delta^{-1}\gamma}f_\gamma, g_\delta),$$

donc (Φ',Ψ') ne dépend que de f_γ, g_δ et T_α. Il s'ensuit que la correspondance

$$\Phi'=\sum_\gamma U'_\gamma f_\gamma \longleftrightarrow \sum_\gamma U''_\gamma f_\gamma=\Phi''$$

est linéaire et isométrique, et alors elle peut être prolongée par continuité à une correspondance linéaire et isométrique entre les espaces $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}''$ tout entiers. Puisque

$$U'_\alpha\Phi'=\sum_\gamma U'_{\alpha\gamma}f_\gamma=\sum_\eta U'_\eta f_{\alpha^{-1}\eta}\longleftrightarrow\sum_\eta U''_\eta f_{\alpha^{-1}\eta}=\sum_\gamma U''_{\alpha\gamma}f_\gamma=U''_\alpha\Phi''$$

cette correspondance établit une *isomorphie* entre les "structures" $\{\mathbf{H}', U'_\gamma\}$ et $\{\mathbf{H}'', U''_\gamma\}$.

Cela achève la démonstration du théorème.

4. Théorème de Neumark.

Remarquons que le théorème de NEUMARK, mentionné déjà dans l'introduction[11]), est une conséquence du théorème III, du moins pour un espace de Hilbert complexe H. Ce théorème affirme que *toute famille* $\{F_\lambda\}$ $(-\infty<\lambda<\infty)$

---

[11]) M. A. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 227—309 (résumé en anglais: 309—318); Об одном представлении аддитивных операторных функции множеств, Доклады Акад. Наук СССР, 41 (1943), 373—375.

de transformations autoadjointes bornées de H, telle que $F_\lambda \leqq F_\mu$ pour $\lambda < \mu$, $F_{\lambda+0} = F_\lambda$, $F_\lambda \to O$ pour $\lambda \to -\infty$, $F_\lambda \to I$ pour $\lambda \to \infty$, peut être représentée sous la forme

$$F_\lambda = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda$$

où $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ est une famille spectrale (de projections) dans un espace $\boldsymbol{H}$ contenant H comme un sous-espace, et où $\boldsymbol{P}$ est la projection sur H.

Envisageons à cet effet la transformation

$$T_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_\lambda,$$

elle est une fonction faiblement continue du paramètre réel t $(-\infty < t < \infty)$. et de type positif. En effet, $T_{-t} = T_t^*$, et

$$\sum_{m,n=1}^{N} (T_{t_n - t_m} g_n, g_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m,n=1}^{N} \exp\left[i(t_n - t_m)\lambda\right] d(F_\lambda g_n, g_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) g(\lambda), g(\lambda)) \geqq 0$$

où

$$g(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} \exp(it_n\lambda)\, g_n.$$

En vertu du théorème III on a donc

$$T_t = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_t,$$

$\{\boldsymbol{U}_t\}$ étant une représentation unitaire continue, dans un espace $\boldsymbol{H} \supseteq H$, du groupe additif des nombres réels. D'après le théorème de Stone on a une famille spectrale $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ dans $\boldsymbol{H}$ telle que

$$\boldsymbol{U}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda.$$

Pour $f \in H$ on a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_\lambda f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f,$$

d'où il s'ensuit que $F_\lambda f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f$, c. q. f. d.

Si $\{F_\lambda\}$ est "étalé" sur le segment $(0, 2\pi)$, c'est-à-dire si $F_0 = O$, $F_{2\pi} = I$, on peut raisonner, au lieu de la "fonction de type positif" T_t, avec la "suite de type positif"

$$T_n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda}\, dF_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et alors on applique, au lieu du théorème de Stone, son analogue "discret"

$$\boldsymbol{U}^n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

D'ailleurs, le cas général peut être réduit à ce cas particulier en remplaçant le paramètre λ par un autre, $\mu = \varphi(\lambda)$, où φ est une fonction strictement croissante et continue, prenant ses valeurs dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

5. Contractions d'un espace de Banach quelconque.

Le théorème I peut être étendu, du moins partiellement, au cas d'un espace de Banach (réel ou complexe) quelconque:

Théorème IV. *Si T est une contraction de l'espace de Banach B, il existe un espace de Banach $\mathbf{B}$ contenant B comme un sous-espace, et une transformation isométrique $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{B}$ tout entier, de sorte qu'on ait*

$$T^n f = \mathbf{P}\mathbf{U}^n f \qquad (\text{pour } f \in B,\ n = 0, 1, 2, \dots),$$

$\mathbf{P}$ étant une projection parallèle de $\mathbf{B}$ sur B, de norme égale à 1.

Démonstration. Soit $\mathbf{B}$ l'ensemble des suites $\mathfrak{f} = \{f_n\}_{-\infty}^{\infty}$ d'éléments de B telles que

$$\|\mathfrak{f}\| = \sum_{-\infty}^{\infty} \|f_n\| < \infty.$$

Avec cette définition de la norme $\|\mathfrak{f}\|$, et avec la définition évidente de l'addition et de la multiplication par des scalaires, $\mathbf{B}$ devient un espace de Banach. L'élément $f \in B$ peut être identifié avec l'élément $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in \mathbf{B}$ pour lequel $f_0 = f$ et $f_n = 0$ $(n \neq 0)$; B devient ainsi un sous-espace de $\mathbf{B}$.

Posons, pour $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in \mathbf{B}$,

$$\mathbf{P}\mathfrak{f} = \sum_{0}^{\infty} T^n f_n;$$

vu que $\|T^n f_n\| \leqq \|f_n\|$, la série au second membre converge. On a défini ainsi une transformation linéaire, de norme 1, de $\mathbf{B}$ en B, qui laisse invariant les éléments du sous-espace B de $\mathbf{B}$. $\mathbf{P}$ est donc une projection parallèle de $\mathbf{B}$ sur B, de norme 1.

En posant

$$\mathbf{U}\{f_n\} = \{f_{n-1}\}$$

on a défini une transformation isométrique de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{B}$ tout entier, et l'on a, pour $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\mathbf{P}\mathbf{U}^m\{f_n\} = \mathbf{P}\{f_{n-m}\} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n f_{n-m}.$$

En particulier, si $\{f_n\} = f \in B$, c'est-à-dire si $f_0 = f$, $f_n = 0$ $(n \neq 0)$, on aura

$$\mathbf{P}\mathbf{U}^m f = T^m f \qquad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

ce qui achève la démonstration du théorème. Remarquons que, pour $m = -1, -2, \dots$, on a $\mathbf{P}\mathbf{U}^m f = 0$.

(Reçu le 1 septembre 1953)

Über die Kummerschen logarithmischen Hilfsfunktionen.

Von PETER DÉNES in Budapest.

Im folgenden bezeichnen l eine ungerade Primzahl, ζ eine primitive l-te Einheitswurzel, $R(\zeta)$ den Kreiskörper der l-ten Einheitswurzeln, $\lambda = 1 - \zeta$, $\mathfrak{l} = (\lambda)$. Dann gilt $\mathfrak{l}^{l-1} = (l)$.

KUMMER[1]) führte im Jahre 1852 den Begriff „Logarithmus einer Kreiskörperzahl ω bezüglich auf den Modul l^{n+1}" ein, welcher auch selbst eine Zahl in $R(\zeta)$ ist. Die Anwendung dieser Logarithmen erleichtert die Rechnung mit Kreiskörperzahlen, da sich die Multiplikation auf Addition, die Potenzierung auf Multiplikation mit einer ganzen rationalen Zahl reduziert; immerhin ergibt sich das Resultat nur als ein Kongruenzrest nach dem Modul l^{n+1}. KUMMER ermittelte ferner[2]) eine Methode zur Berechnung dieser Logarithmen. Bei dieser Methode verwendet er die logarithmische Hilfsfunktion $\log \omega(e^v)$, welche derart definiert wird, dass man in der „Darstellung" der ganzen Zahl ω aus $R(\zeta)$:

$$(1) \qquad \omega = \sum_{i=0}^{s} a_i \zeta^i,$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_s$ ganze rationale Zahlen sind, e^v anstatt ζ setzt. $\omega(e^v)$ und $\log \omega(e^v)$ sind differentiierbare Funktionen des Veränderlichen v.

Obwohl MERTENS[3]) zeigte, daß die von KUMMER angegebene Berechnungsmethode des Logarithmus der Zahl ω bezüglich auf den Modul l^{n+1} nicht richtig ist, haben sich die logarithmischen Hilfsfunktionen in der Lösung gewisser Probleme der Kreiskörpertheorie sehr bewährt, da diese Hilfsfunktionen — unter anderem — auch zur Vereinfachung und Reduktion der Rechnungsoperationen geeignet sind. Schon KUMMER[4]) wendet die logarithmischen Hilfsfunktionen zum Ausdrücken des Potenzcharakters der Kreiskörpereinheiten

---

[1]) E. KUMMER, Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, 44 (1852), 93—146; s. insbesondere S. 130.

[2]) A. a. O. [1]), S. 134 ff.

[3]) F. MERTENS, Über den Kummerschen Logarithmus einer komplexen Zahl des Bereichs einer primitiven l-ten Einheitswurzel in bezug auf den Modul l^{n+1}, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet, *Sitzungsber. Akad. d. Wiss. Wien*, **126** (1917), 1337—1343.

[4]) A. a. O [1]) S. 101 ff.

in geschlossener Form an. Die Methoden von KUMMER hat VANDIVER[5]) zur Bestimmung der Potenzcharakter gewisser Kreiskörperzahlen weiter entwickelt. HILBERT[6]) hat allein vermittelst der logarithmischen Hilfsfunktionen — also ohne die Kummerschen Logarithmen — die Struktur der Einheiten der regulären Kreiskörper untersucht. Ein ähnlicher allgemeiner Strukturaufschluß der Einheiten der irregulären Kreiskörper war bis jetzt zufolge der unten anzugebenden Gründe nicht möglich. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die hierzu nötigen Hilfsmittel zu schaffen. Die Ergebnisse der Strukturuntersuchungen der irregulären Kreiskörpereinheiten werden in einer späteren Arbeit festgelegt.

Die Hauptschwierigkeit liegt darin, daß die Zahl ω zufolge der Identität

$$g(\zeta) = 1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{l-1} = 0 \tag{2}$$

unendlich viele Darstellungen (1) hat, so daß zu jeder Zahl ω unendlich viele verschiedene Hilfsfunktionen gehören. Ist in (1) $s \leqq l-2$, so ist ω in der eindeutig bestimmten *Normalform* gegeben:

$$\omega^* = \sum_{i=0}^{l-2} b_i \zeta^i, \tag{3}$$

wo $b_0, b_1, \ldots, b_{l-2}$ ganze rationale Zahlen bezeichnen. Diese Normalform wird später auch mit einem Stern bezeichnet. Zu der Normalform der Zahl ω gehören die Funktionen $\omega^*(e^v)$ und $\log \omega^*(e^v)$.

Theoretisch kann man aus einer gegebenen Funktion $\log \omega^*(e^v)$ und der ganzen rationalen Zahl ω_0^*, welche durch die Einsetzung $v = 0$ aus $\omega^*(e^v)$ entsteht, die kanonische Form (3) von ω aufstellen, falls $\omega_0^* \neq 0$. Bedeutet nämlich der Operator D_z, daß man z-mal nach v differentiiert und dann $v = 0$ setzt, so ist

$$D_m \log \omega^*(e^v) = F\left[\frac{1}{\omega_0^*}, D_1 \omega^*(e^v), \ldots, D_m \omega^*(e^v)\right], \tag{4}$$

wo F ein ganzzahliges Polynom der Veränderlichen $\frac{1}{\omega_0^*}$, $D_j \omega^*(e^v)$ $(j = 1, \ldots, m)$ darstellt. Aus den auf $m = 1, \ldots, l-2$ bezüglichen Gleichungen (4) kann man $D_j \omega^*(e^v)$ $(j = 1, \ldots, l-2)$ bestimmen, indem man nach (3)

$$D_j \omega^*(e^v) = \sum_{i=1}^{l-2} b_i \cdot i^j \qquad (j = 1, \ldots, l-2) \tag{5}$$

einsetzt.

Die Gleichungen (5) ergeben die Werte $b_1, \ldots, b_{l-2}$; b_0 ergibt sich dann aus

$$\omega_0^* = b_0 + b_1 + \cdots + b_{l-2}.$$

Wird (4) nur als eine Kongruenz nach dem Modul einer Potenz von l angewendet, so ist die schärfere Bedingung $\omega_0^* \not\equiv 0 \pmod{l}$ notwendig; dies

[5]) H. S. VANDIVER, On power characters of singular integers in a properly irregular cyclotomic field, *Transactions American Math. Soc.*, **32** (1930), 391—408.

[6]) D. HILBERT, *Théorie des corps de nombres algébraiques* (1913), §. 138, S. 232—235.

bedeutet, daß die Zahl ω prim zu l ist. Das geschilderte Prinzip ist auch dann anwendbar, wenn $\log\omega(e^v)$ (statt $\log\omega^*(e^v)$) und ω_0 angegeben sind, aber in diesem allgemeinen Falle werden die Rechnungen komplizierter.

Bei der Strukturuntersuchung der regulären Kreiskörpereinheiten genügt es, die Gleichungen (4) als eine Kongruenz modulo l zu betrachten. Die Unbestimmtheit der verschiedenen Darstellungen (1) von ω stört dabei nicht, weil die Kongruenzen

$$D_k \log\omega_1(e^v) \equiv D_k \log\omega_2(e^v) \quad (\mathrm{mod}\, l) \quad (k=1,\ldots,l-2)$$

zwischen zwei beliebigen Darstellungen ω_1 und ω_2 der zu l primen Zahl ω des Körpers $R(\zeta)$ erfüllt sind[7]). Bei der Untersuchung der Einheiten der irregulären Kreiskörper muss man demgegenüber in den Kongruenzen auch höhere Potenzen von l als Modul anwenden. Die Ausarbeitung der Rechnungsmittel der Sätze dieser Arbeit wurde erst durch den Beweis der folgenden Kummerschen Vermutung ermöglicht[8]):

Sind ω_1 und ω_2 zwei zu l prime ganze Zahlen im Körper $R(\zeta)$, für welche $\omega_1 \equiv \omega_2 \pmod{l^{n+1}}$ gilt und ist k eine ganze rationale Zahl, welche nicht durch $l-1$ teilbar ist, so ist

$$D_{kl^n} \log\omega_1(e^v) \equiv D_{kl^n} \log\omega_2(e^v) \qquad (\mathrm{mod}\, l^{n+1}), \tag{6}$$

wo $\log\omega_1(e^v)$ und $\log\omega_2(e^v)$ sich auf beliebige Darstellungen von ω_1 und ω_2 beziehen.

In der vorliegenden Arbeit wird unser Zweck nicht die Normalform von ω aus einer gegebenen Funktion $\log\omega(e^v)$ (und aus ω_0^*) aufzustellen, da dies zur Feststellung der Einheitenstruktur nicht notwendig ist, sondern wir setzen für jede zu l prime Zahl ω des Körpers $R(\zeta)$

$$\omega \equiv f_0 + f_t \lambda^{n(l-1)+t} \qquad (\mathrm{mod}\, l^{n(l-1)+t+1}), \tag{7}$$

wo f_0, f_t zu l prime ganze rationale Zahlen, $0 < t < l-1$ und $n \geqq 0$ sind, und stellen uns den Zweck die Restklassen $f_0 \bmod l^{n+1}$ und $f_t \bmod l$ zu bestimmen. (Diese Restklassen und die Zahlen n, t sind offenbar eindeutige Funktionen von ω).

Zunächst beweisen wir zwei Hilfssätze.

H i l f s s a t z 1. *Erfüllt die Zahl ω des Körpers $R(\zeta)$ die Kongruenz* (7), *so gelten die folgenden Kongruenzen:*

a) *im Falle $n=0$:*

$$D_k \log\omega^*(e^v) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, l) \quad (k=1,2,\ldots,t-1), \tag{8}$$

$$D_t \log\omega^*(e^v) \equiv (-1)^t \cdot \frac{t!\cdot f_t}{\omega_0^*} \qquad (\mathrm{mod}\, l). \tag{9}$$

---

[7]) Vgl. D. Hilbert, a. a. O. [6]) §. 131, S. 213—216, insbesondere Fußnote S. 215.

[8]) P. Dénes, Proof of a conjecture of Kummer, *Publicationes Math. Debrecen,* **2** (1952), 206—214.

b) *im Falle* $n > 0$:

$$D_{k+s_k(l-1)} \log \omega^*(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, t-1), \tag{10}$$

$$D_{t+s_t(l-1)} \log \omega^*(e^v) \equiv (-1)^t \cdot \frac{l^n \cdot t! \cdot f_t}{\omega_0^*} \pmod{l^{n+1}}, \tag{11}$$

wo $s_1, s_2, \ldots, s_t$ *beliebige nicht negative ganze Zahlen sind.*

Beweis: a) $n = 0$. Die Normalform der Zahl ω kann auch als

$$\omega^* = \sum_{k=0}^{l-2} c_k \lambda^k \tag{12}$$

geschrieben werden, wobei $c_0, \ldots, c_{l-2}$ eindeutig bestimmte ganze rationale Zahlen sind. Aus (7) und (12) folgen

$$c_k \equiv 0 \pmod{l} \qquad (k = 1, 2, \ldots, t-1), \tag{13}$$

$$c_t \equiv f_t \pmod{l}. \tag{14}$$

Wird nämlich (12) als eine Kongruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}^2$ untersucht, so ist, falls $t > 1$,

$$\omega^* \equiv c_0 + c_1 \lambda \pmod{\mathfrak{l}^2},$$

woraus folgt $l | c_1$. Ist $t > 2$ und nimmt man den Modul $\mathfrak{l}^3$ zu Hilfe, so folgt $l | c_2$. Schließlich erhält man

$$\omega^* \equiv c_0 + c_t \lambda^t \pmod{\mathfrak{l}^{t+1}},$$

woraus wegen (7) die Kongruenz (14) folgt.

Zwischen den Koeffizienten b und c der Gleichungen (3) und (12) gelten die folgenden Beziehungen:

$$b_i = (-1)^i \sum_{k=i}^{l-2} \binom{k}{i} c_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-2) \tag{15}$$

$$c_k = (-1)^k \sum_{i=k}^{l-2} \binom{i}{k} b_i \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-2) \tag{16}$$

Die Entwicklung von $\binom{j}{k}$ nach Potenzen von j liefert:

$$\binom{j}{k} = \frac{g_{k1} \cdot j + g_{k2} \cdot j^2 + \cdots + g_{kk} \cdot j^k}{k!} \qquad (j, k = 1, \ldots, l-2,\ j \geqq k), \tag{17}$$

wo $g_{11}, \ldots, g_{l-2, l-2}$ rationale ganze Zahlen und

$$g_{kk} = 1 \qquad (k = 1, \ldots, l-2) \tag{18}$$

sind. Setzt man nun die aus den Gleichungen (5) berechneten Werte $b_1, \ldots, b_{l-2}$ in (16), so ergibt sich

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^{k} g'_{kj} \cdot D_j \omega^*(e^v) \qquad (k = 1, \ldots, l-2) \tag{19}$$

und man kann die Identität $g'_{kj} = g_{kj}$ einfach zeigen, indem man die Werte $D_j \omega^*(e^v)$ aus (5) in (19) setzt und die erhaltenen Gleichungen mit (16) vergleicht.

Wird nacheinander $k=1,\ldots,t$ in (13), (18) und (19) eingesetzt, so ergeben sich wegen (14)

(20) $$D_k\omega^*(e^v)\equiv 0 \pmod{l} \qquad (k=1,2,\ldots,t-1),$$

(21) $$D_t\omega^*(e^v)\equiv(-1)^t\cdot t!\cdot f_t \pmod{l}.$$

Drückt man schließlich $D_k \log\omega^*(e^v)$ nacheinander für die Werte $k=1,\ldots,t$ gemäß (4) aus, so wird vermittelst (20)

$$D_k \log\omega^*(e^v)\equiv\frac{1}{\omega_0^*}D_k\omega^*(e^v) \pmod{l} \qquad (k=1,2,\ldots,t).$$

Hieraus folgt der Beweis für $n=0$.

b) $n>0$. Nach (7) gilt

$$\omega^*\equiv f_0 \pmod{\mathfrak{l}^{n(l-1)+t}}.$$

Ist ω^* nach einer Potenz von $\mathfrak{l}$, etwa $\mathfrak{l}^N (N>0)$, als Modul mit einer rationalen ganzen Zahl kongruent, so ist die letztere Zahl nach demselben Modul auch mit c_0 in (12) kongruent, da die übrigen Glieder $c_k\lambda^k\,(k=1,\ldots,l-2)$ nach dem Modul $\mathfrak{l}^N$ nicht mit einer durch $\mathfrak{l}^N$ nicht teilbaren rationalen ganzen Zahl kongruent sind. Daher ist, da $c_0=\omega_0^*$,

$$\omega_0^*\equiv f_0 \pmod{\mathfrak{l}^{n(l-1)+t}}$$

und weil ω_0^* eine rationale ganze Zahl ist und $t>0$, auch

(22) $$\omega_0^*\equiv f_0 \pmod{l^{n+1}}.$$

Hiermit erhält man aus (12)

(23) $$\omega^*\equiv f_0+\sum_{k=1}^{l-2}c_k\lambda^k \pmod{l^{n+1}}.$$

Man kann leicht zeigen, daß die Koeffizienten $c_1,\ldots,c_{l-2}$ durch l^n, ja sogar die Koeffizienten $c_1,\ldots,c_{t-1}$ durch l^{n+1} teilbar sind. Aus (7) und (23) wird nämlich

(24) $$c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{l-2}\lambda^{l-2}\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^{n(l-1)+t}}.$$

Betrachtet man (24) als eine Kongruenz modulo $\mathfrak{l}^2$, so ergibt sich, daß c_1 durch $\mathfrak{l}$, also als eine ganze rationale Zahl auch durch l teilbar ist. Die Untersuchung nach dem Modul $\mathfrak{l}^3$ zeigt dann $l\,|\,c_2$. So weiter schließend sehen wir, dass die Koeffizienten $c_3,\ldots,c_{l-2}$ durch l teilbar sind. Folglich kann man (24) so schreiben:

$$\frac{c_1}{l}\lambda+\frac{c_2}{l}\lambda^2+\cdots+\frac{c_{l-2}}{l}\lambda^{l-2}\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^{(n-1)(l-1)+t}},$$

wo $\frac{c_1}{l},\ldots,\frac{c_{l-2}}{l}$ ganze rationale Zahlen sind. Das angewendete Verfahren kann man n-mal wiederholen, wodurch sich schließlich die Kongruenz

$$\frac{c_1}{l^n}\lambda+\frac{c_2}{l^n}\lambda^2+\cdots+\frac{c_{l-2}}{l^n}\lambda^{l-2}\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^t}$$

ergibt, wo $\frac{c_1}{l^n}, \ldots, \frac{c_{l-2}}{l^n}$ ganze rationale Zahlen sind. Diese Kongruenz kann dann in gleicher Weise nach den Moduln $l^2, \ldots, l^r$ untersucht werden. So ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung:

$$c_1 \equiv c_2 \equiv \cdots \equiv c_{t-1} \equiv 0 \pmod{l^{n+1}}, \tag{25}$$

$$c_t \equiv c_{t+1} \equiv \cdots \equiv c_{l-2} \equiv 0 \pmod{l^n}. \tag{26}$$

Aus (15), (25), (26) folgen

$$b_i \equiv 0 \pmod{l^n} \quad (i = 1, 2, \ldots, l-2). \tag{27}$$

Somit gilt jetzt für die Normalform der Zahl ω

$$\omega^* = b_0 + l^n \sum_{i=1}^{l-2} b_i' \zeta^i, \tag{28}$$

bzw.

$$\omega^* = \omega_0^* + l^n \sum_{k=1}^{l-2} c_k' \lambda^k, \tag{29}$$

wo $b_1', \ldots, b_{l-2}', c_1', \ldots, c_{l-2}'$ ganze rationale Zahlen bezeichnen.

Die Funktion $\log \omega^*(e^v)$ kann durch die unendliche Reihe

$$\log \frac{\omega^*(e^v)}{\omega_0^*} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{j} \left[\frac{\omega^*(e^v) - \omega_0^*}{\omega_0^*}\right]^j$$

ausgedrückt werden. In einer früheren Arbeit[9]) habe ich gezeigt, daß bei Anwendung des Operators D_m $(m > 0)$ auf diese unendliche Summe nur eine endliche Anzahl, und zwar genau m, von den Gliedern der Summe zu berücksichtigen sind:

$$D_m \log \omega^*(e^v) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{j} D_m \left[\frac{\omega^*(e^v) - \omega_0^*}{\omega_0^*}\right]^j \tag{30}$$

Der Summand ist wegen (29) kongruent

$$(-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega_0^{*j}} l^{nj} \cdot D_m \left[\sum_{k=1}^{l-2} c_k' (1 - e^v)^k\right]^j \tag{31}$$

mod l^{n+1}. Es sei j in (31) genau durch die r-te Potenz von l teilbar: $j = j' \cdot l^r$, wobei j' prim zu l ist. (31) ist dann mindestens durch die $(nj'l^r - r)$-te Potenz von l teilbar, da ω_0^* prim zu l ist. Offensichtlich ist

$$n \cdot j' \cdot l^r - r \geqq n + 1, \qquad \text{wenn } j \neq 1, \quad n > 0.$$

Folglich entsteht aus (30) die Kongruenz

$$D_m \log \omega^*(e^v) \equiv \frac{D_m \omega^*(e^v)}{\omega_0^*} \pmod{l^{n+1}}, \quad nm > 0. \tag{32}$$

[9]) A. a. O. [8]) Lemma B, S. 207.

Verwendet man den Operator D_m auf (28), so wird

$$D_m \omega^*(e^v) = l^n \sum_{i=1}^{l-2} b_i' \cdot i^m \tag{33}$$

und hieraus folgt wegen

$$i^{k+s_k(l-1)} \equiv i^k \pmod{l}, \quad (i = 1, 2, \ldots, l-2),$$

wo s_k beliebige nicht negative ganze Zahlen bezeichnen, die Kongruenz

$$D_{k+s_k(l-1)} \omega^*(e^v) \equiv D_k \omega^*(e^v \pmod{l^{n+1}}, \tag{34}$$

welche mit (32) zusammen

$$D_{k+s_k(l-1)} \log \omega^*(e^v) \equiv D_k \log \omega^*(e^v) \pmod{l^{n+1}}, \tag{35}$$

ergibt. Nun bilden wir die Normalfunktion von ω aus der Normalform (29)

$$\omega^*(e^v) = \omega_0^* + l^n \sum_{k=1}^{l-2} c_k'(1-e^v)^k, \tag{36}$$

woraus wegen (25), (26)

$$D_k \omega^*(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, t-1), \tag{37}$$

$$D_t \omega^*(e^v) \equiv (-1)^t \cdot t! \cdot l^n \cdot c_t' \pmod{l^{n+1}}$$

folgen. Aus (7) und (25) können wir aber auf $c_t' \equiv f_t \pmod{l}$ schließen, weshalb

$$D_t \omega^*(e^v) \equiv (-1)^t \cdot t! \cdot l^n \cdot f_t \pmod{l^{n+1}} \tag{38}$$

gilt. Die Kongruenzen (32), (35), (37) und (38) liefern den vollständigen Beweis des Hilfssatzes.

In den folgenden wird von ω nicht mehr vorausgesetzt, daß es in seiner Normalform bekannt ist. Es gilt dann der folgende

H i l f s s a t z 2. *Erfüllt die Zahl ω des Körpers $R(\zeta)$ die Kongruenz* (7), *so bestehen die folgenden Kongruenzen:*

a) *im Falle $n = 0$:*

$$D_k \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l} \quad (k = 1, 2, \ldots, t-1), \tag{39}$$

$$D_t \log \omega(e^v) \equiv (-1)^t \cdot \frac{t! \cdot f_t}{\omega_0} \pmod{l}, \tag{40}$$

$$f_0 \equiv \omega_0 \pmod{l};$$

b) *im Falle $n > 0$:*

$$D_{il^y} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{y+1}} \quad (y = 1, \ldots, n-1; i = 1, 2, \ldots, l-2), \tag{41}$$

$$D_{kl^w} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, t-1), \tag{42}$$

$$D_{tl^w} \log \omega(e^v) \equiv (-1)^t \cdot \frac{l^n \cdot t! \cdot f_t}{\omega_0} \pmod{l^{n+1}}, \tag{43}$$

wo w eine ganze rationale Zahl bezeichnet, $w \geqq n$, und

$$f_0 \equiv \omega_0 - \frac{l}{l-1} \cdot D_{l^w(l-1)} \omega(e^v) \pmod{l^{n+1}}. \tag{44}$$

Beweis: a) $n=0$. Zufolge (2) hängen die verschiedenen Darstellungen der Zahl ω durch eine Gleichung

$$\omega=\omega^*+\xi\cdot g(\zeta) \tag{45}$$

zusammen, wo ξ eine ganze Zahl in $R(\zeta)$ ist. Diese kann in der Form

$$\xi=x_0+\varphi\lambda$$

angenommen werden, wo φ ebenfalls eine ganze Zahl in $R(\zeta)$ und x_0 eine ganze rationale Zahl bedeutet. Hieraus folgen die Gleichungen

$$\omega_0=\omega_0^*+l x_0, \tag{46}$$

$$\omega(e^v)=\omega^*(e^v)+x_0\cdot g(e^v)+\varphi(e^v)\cdot[1-e^{lv}] \tag{47}$$

und aus (46) die Kongruenz

$$\omega_0\equiv\omega_0^* \pmod{l}. \tag{48}$$

Der Beweis für $n=0$ ist hiermit erledigt, da (39), (40) aus (8), (9), (48) und der Kummer—Hilbertschen Relation[7])

$$D_k \log \omega(e^v)\equiv D_k \log \omega^*(e^v) \pmod{l} \quad (k=1,\ldots,l-2) \tag{49}$$

folgen.

b) $n>0$. Nach dem oben schon erwähnten Kummerschen Satz ist[8])

$$D_{kl^n} \log \omega(e^v)\equiv D_{kl^n} \log \omega^*(e^v) \pmod{l^{n+1}} \tag{50}$$

für $l-1 \nmid k$. Die Kongruenz (41) folgt dann unmittelbar aus (32), (33) und (50). Wählt man ferner s_k in (10), (11) folgenderweise:

$$s_k=k\frac{l^n-1}{l-1} \quad (k=1, 2, \ldots, l-2), \tag{51}$$

so können (42) und (43) einfach mittels der Kongruenzen (10), (11), (48) und (50) bestätigt werden.

Wird der Operator $D_{l^n(l-1)}$ auf (47) angewendet, so erhält man

$$D_{l^n(l-1)}\omega(e^v)=D_{l^n(l-1)}\omega^*(e^v)+x_0\sum_{i=1}^{l-1} i^{l^n(l-1)}+D_{l^n(l-1)}\varphi(e^v)\cdot[1-e^{lv}]. \tag{52}$$

Nach (3) gilt

$$D_{l^n(l-1)}\omega^*(e^v)\equiv 0 \pmod{l^n},$$

ferner gilt wegen

$$D_{l^n(l-1)}e^{sv}[1-e^{lv}]=s^{l^n(l-1)}-(l+s)^{l^n(l-1)}\equiv 0 \pmod{l^{n+1}}$$

auch

$$D_{l^n(l-1)}\varphi(e^v)\cdot[1-e^{lv}]\equiv 0 \pmod{l^n}. \tag{53}$$

Hieraus und aus (52) folgt zunächst:

$$D_{l^n(l-1)}\omega(e^v)\equiv x_0(l-1) \pmod{l^n},$$

dann wegen (22) und (46) auch (44). Damit ist der Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

Diese Hilfssätze sind umkehrbar. So erhalten wir z. B. aus dem Hilfssatz 2 den folgenden, für unsere weiteren Forschungen wichtigen Satz:

S a t z 1. *Ist ω eine zu l prime Zahl aus dem Körper $R(\zeta)$ und $\omega(e^v)$ eine gewisse, zu ω gehörige Funktion, für die die Kongruenzen*

(54) $$D_{il^y} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{y+1}} \quad (y = 1, \ldots, n-1;\ i = 1, \ldots, l-2).$$

(55) $$D_{kl^n} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \quad (k = 1, \ldots, t-1).$$

(56) $$D_{tl^n} \log \omega(e^v) \equiv q \not\equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \quad 0 < t < l-1$$

bestehen, so ist

$$\omega \equiv f_0 + f_t \lambda^{n(l-1)+t} \pmod{l^{n(l-1)+t+1}},$$

wo f_0 und f_t zu l prime ganze rationale Zahlen sind und

(44) $$f_0 \equiv \omega_0 + \frac{l}{l-1} D_{l^n(l-1)} \omega(e^v) \pmod{l^{n+1}}$$

(57) $$f_t \equiv (-1)^t \cdot \omega_0 \cdot \frac{q}{l^n \cdot t!} \pmod{l}$$

gelten.

B e w e i s: Setzt man nämlich

$$\omega \equiv f_0' + f_{t'}' \lambda^{n'(l-1)+t'} \pmod{l^{n'(l-1)+t'+1}}, \quad 0 < t' < l-1,$$

wo f_0' und $f_{t'}'$ zu l prime ganze rationale Zahlen sind, so gelten nach Hilfssatz 2 die Kongruenzen:

(58) $$D_{il^y} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{y+1}} \quad (y = 1, \ldots, n'-1;\ i = 1, \ldots, l-2),$$

(59) $$D_{il^{n'}} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{n'+1}} \quad (i = 1, \ldots, t'-1),$$

(60) $$D_{t'l^{n'}} \log \omega(e^v) \not\equiv 0 \pmod{l^{n'+1}}.$$

Wäre nun $n' > n$, so steht (58) in einem Widerspruch mit (56). Ist $n' < n$, so stehen (54) und (60) im Widerspruch. Es ist also $n' = n$. Ist etwa $t' > t$, so widerspricht (56) mit (59). Umgekehrt, wenn $t' < t$, so ergeben (55) und (60) einen Widerspruch. Es muß also $t' = t$ sein.

Die Kongruenz (44) wurde bereits im Hilfssatze 2 bewiesen. Es bleibt also nur noch die Bestätigung von (57) übrig. Ist $n = 0$, so erhält man (57) einfach aus (40). Ist $n > 0$, so ist q durch l^n teilbar. Nach (32) und (34) hat man nämlich

$$D_{tl^{n-1}} \log \omega^*(e^v) \equiv D_{tl^n} \log \omega^*(e^v) \pmod{l^{n+1}} \quad 0 < t < l-1,$$

woraus auf Grund von (50)

$$D_{tl^{n-1}} \log \omega(e^v) \equiv D_{tl^n} \log \omega(e^v) \pmod{l^n}$$

folgt; dies ergibt mit (54) und (56) zusammen $q \equiv 0 \pmod{l^n}$. Die Richtigkeit von (57) folgt also einfach aus den Kongruenzen (43), (48) und (56). Somit haben wir Satz 1 bewiesen.

In diesem Satz kann manchmal Schwierigkeiten verursachen, daß man zur Bestimmung von f_0 gemäß (44) auch die Funktion $\omega(e^v)$ kennen muß, die, wie auch $\log \omega(e^r)$, nicht immer in brauchbarer Form zur Verfügung steht. Die Kenntnis dieser Funktion ist überflüssig, wenn die Bedingungen des nächsten Satzes erfüllt sind:

Satz 2. *Ist ω eine zu l prime Zahl des Körpers $R(\zeta)$, welche mit einer rationalen ganzen Zahl nach dem Modul l^n kongruent ist und bezeichnet $\omega(e^r)$ eine beliebige Funktion von ω, $\omega^*(e^r)$ die Normalfunktion von ω, so ist zu*

$$\omega_0 \equiv \omega_0^* \pmod{l^{n+1}} \tag{61}$$

notwendig und hinreichend, daß

$$D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^r) \equiv 0 \pmod{l^n} \tag{62}$$

ist.

Beweis: Wir nehmen $n > 0$ an, weil (61) für $n = 0$ wegen (48) trivial erfüllt ist. Aus (45) folgt

$$\omega(e^r) = \omega^*(e^r) + \xi(e^r)\cdot g(e^r), \tag{63}$$

also auch

$$\begin{aligned} D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^r) &\equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{j} \cdot D_{l^n(l-1)} \left[\frac{\omega^*(e^r) - \omega_0^* + \xi(e^r)\cdot g(e^r)}{\omega_0} \right]^j \pmod{l^n}, \end{aligned} \tag{64}$$

wobei die Zahl m nach Lemma C meiner zitierten Arbeit[10]) endlich ist, weil die hierzu notwendige Bedingung $\omega_0 \equiv \omega_0^* \pmod{l}$ erfüllt ist.

Nach (29) ist $[\omega^*(e^r) - \omega_0^*]$ durch l^n teilbar; (64) vereinfacht sich also nach dem Modul l^n:

$$D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^r) \equiv \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{j\cdot \omega_0^{*j}} D_{l^n(l-1)} \xi^j(e^r)\cdot g^j(e^r) \pmod{l^n}.$$

Wird die Zahl ξ wieder in der Form $\xi = x_0 + \varphi\lambda$ geschrieben, wo x_0 eine ganze rationale Zahl und φ eine Zahl in $R(\zeta)$ ist, so folgt

$$\xi^j(e^r)\cdot g^j(e^r) = x_0^j \cdot g^j(e^r) + (1 - e^{lr}) \cdot H(e^r),$$

wo $H(e^r)$ ein ganzzahliges Polynom in e^r bezeichnet. Mit Hilfe von (53) wird also ferner

$$D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^r) \equiv \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{j\cdot \omega_0^{*j}} D_{l^n(l-1)} x_0^j \cdot g^j(e^r) \pmod{l^n}.$$

Schreibt man $g'(e^r)$ für $\dfrac{dg(e^r)}{dr}$, so folgt aus der obigen Kongruenz

$$\begin{aligned} D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^r) &\equiv D_{l^n(l-1)} \frac{x_0}{\omega_0} g(e^r) + \\ &+ \sum_{j=2}^{m} (-1)^{j-1} \frac{x_0^j}{\omega_0^{*j}} D_{l^n(l-1)-1} g^{j-1}(e^r)\cdot g'(e^r) \pmod{l^n}. \end{aligned} \tag{65}$$

[10]) A. a. O. [8]), Lemma C, S. 207.

Nach Lemma D meiner zitierten Arbeit[11]) ist jedes Glied nach dem Summenzeichen durch l teilbar. Man kann also mit Rücksicht auf

$$D_{l^n(l-1)} g(e^r) \equiv l-1 \qquad (\mathrm{mod}\ l^n)$$

schreiben:

$$(66) \qquad D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^r) \equiv \frac{(l-1)x_0}{\omega_0^*} + x_0^2 \cdot l \cdot Q \qquad (\mathrm{mod}\ l^n),$$

wo Q eine ganze, bzw. eine solche gebrochene rationale Zahl ist, deren Nenner prim zu l ist.

Wir zeigen zuerst, daß (62) eine notwendige Bedingung zum Erfülltsein von (61) ist. Aus (46) und (61) folgt

$$x_0 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ l^n),$$

und wenn man dies in (66) einsetzt, so folgt (62).

Das Bestehen von (62) ist auch hinreichend für (61). Aus (62) und (66) folgt nämlich

$$(67) \qquad x_0 \left[\frac{l-1}{\omega_0^*} + l \cdot x_0 \cdot Q \right] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ l^n),$$

und da der Ausdruck in den Klammern nach der obigen Feststellung bezüglich Q prim zu l ist, ist die einzige Lösung von (67)

$$x_0 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ l^n);$$

setzt man dieses Ergebnis in (46), so erhält man (61).

(Eingegangen am 7. April 1952.)

[11]) A. a. O.[8]), Lemma D S. 208.

Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

H. POINCARÉ [1]) hat als eine Verwirklichung der hyperbolischen ebenen Geometrie folgendes Modell, wir möchten sagen *Bildgeometrie* oder *Pseudogeometrie* angegeben, wenn auch in etwas anderer Form.

Es sei in der euklidischen Ebene eine Gerade γ als *Fundamentalgerade* vorgelegt. Die inneren Punkte einer der durch γ bestimmten zwei Halbebenen sollen *Pseudopunkte*, die im Innern dieser Halbebene liegenden und zu γ rechtwinkligen Halbkreise bzw. Halbgeraden (die wir *Orthogonalhalbkreise* resp. *Orthogonalhalbgeraden* nennen wollen), *Pseudogeraden* heißen. Als *Pseudoabstand* zweier nicht in einer Orthogonalhalbgeraden liegenden Pseudopunkte P_1, P_2 erklären wir die Größe

$$\overline{P_1 P_2} = \log (\Xi H P_2 P_1) \tag{1}$$

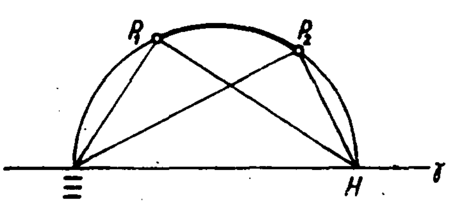


Fig. 1

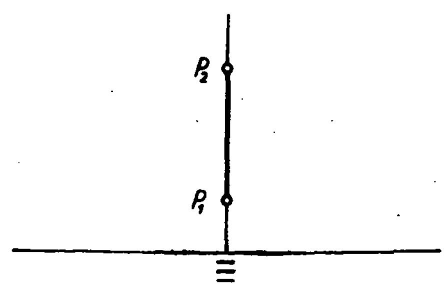


Fig. 2

wobei Ξ, H die Endpunkte des durch P_1 und P_2 gelegten Orthogonalhalbkreises sind, so bezeichnet, daß P_2 auf diesem Halbkreisbogen $\widehat{\Xi H}$ zwischen P_1 und H liegt (Fig. 1), und $(\Xi H P_2 P_1)$ das Doppelverhältnis

$$(\Xi H P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{P_2 H} : \frac{\Xi P_1}{P_1 H}$$

[1]) H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Math.*, 1 (1882), 1—62, besonders § 2, S. 6—8.

bedeutet. Sind P_1 und P_2 Punkte einer Orthogonalhalbgeraden mit dem Anfangspunkt Ξ, und ist die Bezeichnung so gewählt, daß P_1 zwischen Ξ und P_2 liegt (Fig. 2), so sei der Pseudoabstand dieser Pseudopunkte der Formel (1) entsprechend

$$\overline{P_1 P_2} = \log \frac{\Xi P_2}{\Xi P_1}. \tag{2}$$

Dem gegenüber soll der *Pseudowinkel* zweier Pseudogeraden l, m einfach durch den Winkel der sie erzeugenden Orthogonalhalbkreise (deren einer in eine Orthogonalhalbgerade entarten kann) gemessen werden (Fig. 3). In der durch diese Festsetzungen erklärten Bildgeometrie sind in der Tat alle Postulate der hyperbolischen ebenen Geometrie erfüllt, wie man sich davon leicht überzeugen kann.

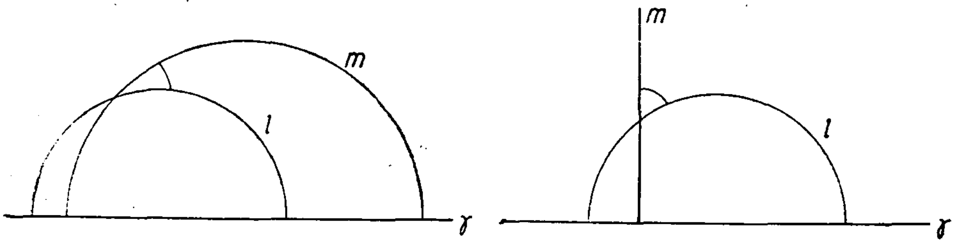


Fig. 3

Diese sogenannte *Poincarésche Halbebene* ist aber nicht nur ein Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie, sie ist mit ihr auch äquivalent: man kann die hyperbolische Ebene auf die Poincarésche Halbebene eineindeutig abbilden. Das mag in sehr einfacher Weise gezeigt werden, und zwar ohne Verwendung der hyperbolischen Trigonometrie[2]). Eine Herleitung der Trigonometrie dieses Modells gilt deshalb für einen Beweis der Formeln der hyperbolischen Trigonometrie. In vorliegender Note geben wir eben einen Beweis dieser Art.

Die Herleitung der Trigonometrie des *Poincaréschen Kreismodells*,[3]) die schon Howard Eves und V. E. Hoggatt[4]) und in einfacherer Weise wir[5]) dargetan haben, kann als ein Beweis ähnlicher Art aufgefaßt werden, da dieses Modell eine eineindeutige Abbildung der Poincaréschen Halbebene ist. Noch einfacher gestaltet sich aber unser gegenwertiger Beweis, dem wir uns jetzt zuwenden.

---

[2]) Siehe z. B. Paul Szász, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Erscheinen).

[3]) H. Poincaré, a. a. O. [1]). § 12, S. 58—61.

[4]) Howard Eves and V. E. Hoggatt, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *American Math. Monthly*, **38** (1951), 469—474.

[5]) Paul Szász, Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Erscheinen).

Es sei ABC ein bei C rechtwinkliges Pseudodreieck mit den Bestimmungsstücken $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, $\sphericalangle BAC=\lambda$, $\sphericalangle CBA=\mu$. Es mag durch eine Pseudodrehung um B in eine solche Lage gebracht werden, daß A zwischen B und dem Anfangspunkt Ω der durch B gelegten Orthogonal-

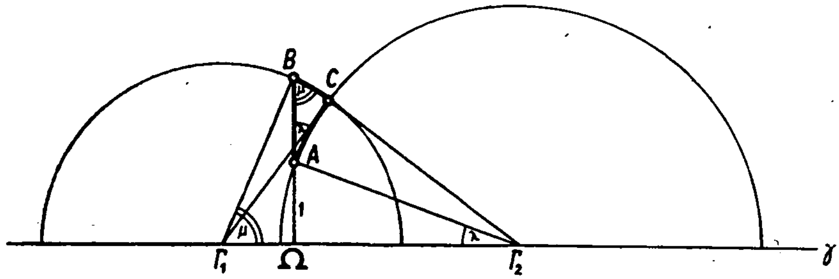


Fig. 4

halbgeraden liegt (Fig. 4). Wird $\Omega A=1$ gesetzt, so ist im Sinne von (2)

$$c=\overline{AB}=\log \Omega B,$$

d. h.

(3) $$\Omega B=e^c.$$

Bezeichnet Γ_1 bzw. Γ_2 den Mittelpunkt des durch die Punkte B, C resp. A, C gelegten Orthogonalhalbkreises, so ist offenbar $\sphericalangle \Omega\Gamma_1 B=\mu$, $\sphericalangle \Omega\Gamma_2 A=\lambda$, also mit Rücksicht auf (3)

(4) $$\Omega\Gamma_1=e^c \operatorname{ctg}\mu,\quad \Omega\Gamma_2=\operatorname{ctg}\lambda,$$

und

(5) $$\Gamma_1 C=\Gamma_1 B=\frac{e^c}{\sin\mu},\quad \Gamma_2 C=\Gamma_2 A=\frac{1}{\sin\lambda}.$$

Da aber nach Voraussetzung die beiden Orthogonalhalbkreise sich in C rechtwinklig schneiden, also $\sphericalangle \Gamma_1 C\Gamma_2$ ein Rechter ist, so gilt nach dem Pythagoreischen Lehrsatz

$$\Gamma_1\Gamma_2^2=\Gamma_1 C^2+\Gamma_2 C^2$$

d. h. auf Grund von (4) und (5)

$$(e^c \operatorname{ctg}\mu+\operatorname{ctg}\lambda)^2=\frac{e^{2c}}{\sin^2\mu}+\frac{1}{\sin^2\lambda},$$

woher sich

$$2e^c \operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\mu=e^{2c}+1$$

oder

(I) $$\operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\mu=\operatorname{ch} c$$

ergibt.

Nun bringen wir das rechtwinklige Pseudodreieck ABC nochmals durch eine Pseudodrehung um B in eine solche Lage, daß B zwischen C und dem

Anfangspunkt Ω der vorigen Orthogonalhalbgeraden liegt (Fig. 5). Setzen wir jetzt $\Omega B = 1$, so ist nach (2)

$$a = \overline{BC} = \log \Omega C$$

d. h.

(6) $$\Omega A = \Omega C = e^a.$$

Bezeichnet Γ_3 den Mittelpunkt des durch die Punkte A, B gelegten Orthogonalhalbkreises, so ist offenbar $\sphericalangle \Omega \Gamma_3 B = \mu$ und deshalb

(7) $$\Gamma_3 A = \Gamma_3 B = \frac{1}{\sin\mu}, \quad \Omega\Gamma_3 = \operatorname{ctg}\mu.$$

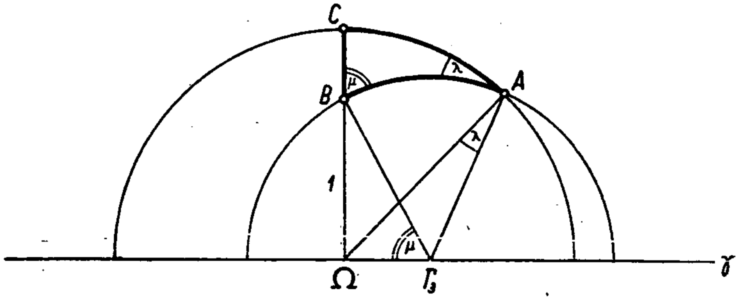


Fig. 5

Weil aber $\sphericalangle \Omega A \Gamma_3 = \lambda$ ausfällt, so ergibt der Cosinussatz für das Dreieck $A\Omega\Gamma_3$

$$\Omega\Gamma_3^2 = \Omega A^2 + \Gamma_3 A^2 - 2\Omega A \,.\, \Gamma_3 A \cos\lambda$$

d. h. mit Rücksicht auf (6) und (7)

$$\operatorname{ctg}^2\mu = e^{2a} + \frac{1}{\sin^2\mu} - \frac{2e^a}{\sin\mu}\cos\lambda,$$

woraus folgt

$$2e^a \frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = e^{2a} + 1$$

oder

(II) $$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \operatorname{ch} a.$$

Die Formeln (I) und (II) haben schon die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge. Der angekündigte Beweis ist daher fertig.

(Eingegangen am 12. Juni 1953.)

Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplikativer Strukturen.

Von G. SZÁSZ in Szeged.

§ 1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich bezüglich der allgemeinen multiplikativen Strukturen alle unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen gegeben. In der vorliegenden Arbeit werde ich das analoge Problem für den kommutativen Fall untersuchen. Um unser Problem genau formulieren zu können, schicke ich zuerst einige Definitionen und Bezeichnungen voraus.

Es sei S_ν eine gegebene Menge mit ν Elementen; ν mag endlich oder unendlich sein. Ist in S_ν eine (eindeutige) Multiplikation definiert, so sagen wir, daß die Menge S_ν hinsichtlich der gegebenen Multiplikation eine *multiplikative Struktur* $S_\nu^\times$ bildet. Natürlich lassen sich aus S_ν mehrere $S_\nu^\times$ bilden; ist die Multiplikation in $S_\nu^\times$ kommutativ, so nennen wir $S_\nu^\times$ eine *kommutative multiplikative Struktur.*

Betrachten wir jetzt die aus den Elementen eines S_ν gebildeten Tripel. Wenn das Tripel (x, y, z) $(x, y, z \in S_\nu)$ in einem $S_\nu^\times$ die Gleichung $(xy)z = x(yz)$ erfüllt, so nennen wir es *assoziativ in* $S_\nu^\times$; ist dagegen $(xy)z \neq x(yz)$ in $S_\nu^\times$, so sagen wir, daß (x, y, z) *nichtassoziativ in* $S_\nu^\times$ ist.

Die sämtlichen Gleichungen

$$(1) \qquad (xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in S_\nu)$$

werden die *Assoziativitätsbedingungen der Menge* S_ν, insbesondere die Gleichung $(xy)z = x(yz)$ die *zum Tripel* (x, y, z) *gehörende Assoziativitätsbedingung* genannt, die wir etwas ungenau manchmal auch „die Assoziativitätsbedingung (x, y, z)" nennen. Eine multiplikative Struktur, in der alle Gleichungen (1) erfüllt sind, nennen wir eine *assoziative multiplikative Struktur* oder eine *Halbgruppe.* Anders gesagt, eine Halbgruppe ist eine multiplikative Struktur mit lauter assoziativen Tripeln.

Die Gesamtheit der Gleichungen (1) ist ein Axiomensystem der Assoziativität für allgemeine multiplikative Strukturen. In der zitierten Arbeit habe

[1]) G. SZÁSZ, Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen, *diese Acta,* **15** (1953), 20—28.

ich das Problem der Unabhängigkeit dieses Axiomensystems vollständig gelöst. Als Hauptresultat habe ich bewiesen, daß die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen von S_ν für $\nu \geqq 4$ ein unabhängiges System bildet. Das heißt, es gibt im Fall $\nu \geqq 4$ keine Teilmenge der Assoziativitätsbedingungen von der Eigenschaft, daß aus dem Erfülltsein der Assoziativitätsbedingungen dieser Teilmenge auch schon das von allen Assoziativitätsbedingungen folgt. Dies bedeutet, daß im allgemeinen zum Ausweis der Assoziativität einer multiplikativen Struktur mit mindestens vier Elementen alle Tripel nach der Assoziativität hin untersucht werden müssen. Für $\nu \leqq 3$ sind die Assoziativitätsbedingungen von S_ν nicht alle voneinander unabhängig; für diese Fälle habe ich die sämtlichen unabhängigen vollständigen[2]) Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen gegeben.

Es liegt die Lage ganz anders, wenn man nicht die sämtlichen aus S_ν gebildeten multiplikativen Strukturen, sondern nur die kommutativen betrachtet. Dann bildet die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen selbstverständlich für kein ν ein unabhängiges Axiomensystem. Wegen der Kommutativität ist nämlich eine Gleichung

$$(xy)z = x(yz) \tag{2. 1}$$

mit der anderen

$$(zy)x = z(yx) \tag{2. 2}$$

gleichzeitig erfüllt oder gleichzeitig nichterfüllt. In dieser Arbeit wollen wir deshalb für jedes ν alle unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen bezüglich der kommutativen multiplikativen Strukturen mit ν Elementen bestimmen. Ausführlich gesagt, wir werden alle Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen bestimmen, die die folgenden zwei Eigenschaften besitzen:

1. Sind in einer kommutativen $S_\nu^\times$ die Assoziativitätsbedingungen des genannten Teilsystems alle erfüllt, so sind es auch die übrigen Assoziativitätsbedingungen in $S_\nu^\times$ („Vollständigkeit des Teilsystems");

2. Zu jeder Assoziativitätsbedingung dieses Teilsystems kann man ein kommutatives $S_\nu^\times$ finden, so daß in diesem die betrachtete Assoziativitätsbedingung nichterfüllt, alle anderen Assoziativitätsbedingungen des Teilsystems erfüllt sind („Unabhängigkeit des Teilsystems").

Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir die folgenden Resultate bekommen:

Satz 1. *Bezüglich der aus der Menge S_ν ($\nu \geqq 3$) gebildeten kommutativen multiplikativen Strukturen lassen sich die sämtlichen unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen folgenderweise gewinnen:*

---

[2]) Wie üblich nennen wir ein Teilsystem eines Axiomensystems *vollständig*, wenn es mit dem ursprünglichen äquivalent ist.

1°. *Im Fall* $\nu = 3$ *wähle man von den aus* S_3 *gebildeten Tripeln eins mit verschiedenen Elementen beliebig aus.*

2°. *Im Fall* $\nu \geqq 4$ *betrachte man zunächst alle Tripel*

$$(a, b, c) \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \in S_\nu; \\ a \neq b, \; b \neq c, \; c \neq a \end{pmatrix}.$$

Aus je sechs dieser Tripel, die voneinander nur in der Reihenfolge der Elemente unterscheiden, wähle man je zwei Tripel, die auseinander nicht durch die Umkehrung der Reihenfolge der Elemente entstehen, beliebig aus.

3°. *In beiden Fällen* 1°, 2° *wähle man noch aus je zwei Tripeln*

$$(a, a, b), \quad (b, a, a) \qquad (a, b \in S; \; a \neq b)$$

das eine beliebig aus.

Die zu den ausgewählten Tripeln gehörenden Assoziativitätsbedingungen bilden in jedem Falle $\nu \geqq 3$ *ein gewünschtes Teilsystem aller Assoziativitätsbedingungen, und jedes solche Teilsystem entsteht auf diese Weise*[3]).

Für den Fall $\nu = 2$ gilt der folgende

Satz 2. *Bezüglich der aus der Menge*[4]) $S_2 = \{a, b\}$ *gebildeten kommutativen multiplikativen Strukturen besteht jedes unabhängige vollständige Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen aus einer einzigen, und zwar aus einer beliebigen der zu*

$$(a, a, b), \quad (a, b, b), \quad (b, a, a), \quad (b, b, a)$$

gehörenden Assoziativitätsbedingungen.

Wir werden den Beweis dieser Sätze im § 2 mit einer Reduktion beginnen.

§ 2. Reduktion des Problems.

Von hier an verstehen wir unter „Multiplikation" immer „kommutative Multiplikation", unter „Struktur" immer „kommutative (multiplikative) Struktur". Dementsprechend werden wir dem Ausdruck „unabhängiges vollständiges Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen" immer auch die Ergänzung „bezüglich der kommutativen multiplikativen Strukturen" beigefügt denken.

---

3) Man sieht leicht, daß die Anzahl derjenigen Tripel, die nach 3° bzw. nach 2° ausgewählt werden müssen, für ein endliches $\nu \geqq 4$ gleich $\nu(\nu-1)$, bzw. $2\binom{\nu}{3}$ ist. Jedes unabhängige vollständige Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen einer endlichen Menge S_ν $(\nu \geqq 4)$ besteht also nach diesem Satz aus

$$\nu(\nu-1) + 2\binom{\nu}{3} = \frac{\nu^3 - \nu}{3}$$

Gleichungen.

Ähnlich ergibt sich leicht nach 1° und 2°, daß im Fall $\nu = 3$ jedes unabhängige vollständige Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen aus 7 Gleichungen besteht.

4) Mit $\{\ \}$ bezeichnen wir die Menge der eingeklammerten Elemente.

Ferner verabreden wir uns, daß wir beliebige, nicht notwendig verschiedene Elemente von S_ν mit x, y, z, und beliebige, aber verschiedene Elemente von S_ν mit a, b, c, d bezeichnen (wie auch schon in den vorangehenden).

Es wurde schon in der Einleitung erwähnt, daß sich die Gleichungen

$$(2) \qquad (xy)z = x(yz), \quad z(yx) = (zy)x$$

wegen der Kommutativität für alle Tripel (x, y, z) gleichzeitig erfüllt oder gleichzeitig nichterfüllt sind. Auf Grund dieser Tatsache definieren wir einen Äquivalenzbegriff für die Assoziativitätsbedingungen der Menge S_ν:

D e f i n i t i o n 1. *Zwei verschiedene Assoziativitätsbedingungen von S_ν nennen wir (bezüglich der kommutativen multiplikativen Strukturen) äquivalent, wenn in ihnen die Reihenfolge der auftretenden Elemente entgegengesetzt ist. Es wird jede Assoziativitätsbedingung auch mit sich selbst äquivalent genannt.*

Es ist klar, daß äquivalente Assoziativitätsbedingungen nur gleichzeitig erfüllt sein können.

Ferner definieren wir die Äquivalenz zweier Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen:

D e f i n i t i o n 2. *Zwei Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen nennen wir äquivalent, wenn die in ihnen vorkommenden Assoziativitätsbedingungen paarweise äquivalent sind.*

Ist von zwei äquivalenten Teilsystemen der Assoziativitätsbedingungen das eine unabhängig und vollständig, so ist es auch das andere. Deshalb *genügt es alle nichtäquivalenten unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen zu bestimmen.* Wir werden deshalb unsere Untersuchungen in dieser Richtung führen.

Kurz bezeichnen wir mit $S_\nu^{(3)}$ die Menge aller Tripel, die sich aus den Elementen von S_ν bilden lassen. Wir sagen, daß die Elemente (x, y, z), (x', y', z') von $S_\nu^{(3)}$ *vom gleichen Typ* sind, wenn sie auseinander durch eine Permutation der Elemente von S_ν entstehen. Faßt man die Tripel von gleichem Typ in einer Klasse zusammen, so entsteht eine Einteilung der Menge $S_\nu^{(3)}$ in paarweise elementfremde Klassen. Im Fall $\nu \geqq 3$ gibt es insgesamt fünf solche Klassen. Diese bestehen der Reihe nach aus den Tripeln vom Typ

$$(a, a, a), \quad (a, b, a), \quad (a, a, b), \quad (b, a, a), \quad (a, b, c).$$

Der Fall $\nu = 2$ ist ähnlich mit dem Unterschied, daß die fünfte Klasse ausbleibt.

Selbstverständlich sagen wir, daß zwei Assoziativitätsbedingungen vom gleichen Typ sind, wenn sie Tripeln vom gleichen Typ zugehören. Wird dann in der obigen Klasseneinteilung jedes Tripel durch die entsprechende Assoziativitätsbedingung ersetzt, so entsteht eine Einteilung aller Assoziativitätsbedingungen in (fünf, bzw. vier) Klassen, in denen stets die Assoziativitätsbedingungen vom gleichen Typ vereinigt sind.

Nun lassen sich in unserem Problem einige leichte Reduktionen ausführen, mit denen wir uns hier beschäftigen wollen. Vor allem erkennen wir, daß alle Tripel vom Typ (a, a, a) und (a, b, a) in jeder Struktur $S_\nu^\times$ assoziativ sind. Wegen der Kommutativität gelten nämlich

$$(aa)a = a(aa) \quad \text{und} \quad (ab)a = a(ba)$$

für alle a, b in S_ν. Wir dürfen also die Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, a) und (a, b, a) durchaus außer Acht lassen.

Ferner sehen wir aus Definition 1, daß jede Assoziativitätsbedingung vom Typ (b, a, a) zu einer vom Typ (a, a, b) äquivalent ist. Zufolge dieser Tatsache und der obigen Bemerkung brauchen wir uns also aus diesen zwei Typen nur mit dem einen, zum Beispiel nur mit den Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b) zu beschäftigen.

Endlich sind die Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, b, c) wegen der Äquivalenz zweier Gleichungen von der Form (2) paarweise äquivalent. Dabei brauchen wir aus äquivalenten Paaren der Assoziativitätsbedingungen nur stets je einen Repräsentanten zu beachten. Die zu beachtenden dürfen wir natürlich beliebig auswählen; um aber etwas bestimmtes vor Augen zu haben, entscheiden wir darüber folgenderweise.

Je sechs Tripel von diesem Typ, die nur durch die Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, teilen wir in eine Klasse ein. So wird jedes Tripel vom Typ (a, b, c) eindeutig in eine solche Klasse eingeteilt. Jene von diesen Klassen, deren sechs Tripel aus den Elementen a, b, c gebildet sind, werde mit $C[a, b, c]$ bezeichnet. Die Klasse $C[a, b, c]$ besteht also aus den Tripeln

$$(a, b, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b) \tag{3.1}$$

und

$$(c, b, a), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c). \tag{3.2}$$

Im Fall $\nu = 3$ gibt es natürlich nur eine einzige Klasse $C[a, b, c]$, so daß für $\nu = 3$ „Typ (a, b, c)" und „Klasse $C[a, b, c]$" gleichbedeutend sind.

Zu den Tripeln (3.1) bzw. (3.2) gehören die Assoziativitätsbedingungen

$$(ab)c = a(bc), \quad (bc)a = b(ca), \quad (ca)b = c(ab) \tag{4.1}$$

bzw.

$$(cb)a = c(ba), \quad (ac)b = a(cb), \quad (ba)c = b(ac). \tag{4.2}$$

Die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen (4.1), (4.2) nennen wir, ähnlich wie die Gesamtheit aller Tripel (3.1), (3.2), „die $C[a, b, c]$-Klasse der Assoziativitätsbedingungen (vom Typ (a, b, c))". Man sieht sofort, daß jede Assoziativitätsbedingung von der Form (4.2) mit einer von der Form (4.1) äquivalent ist. Es ist also für uns hinreichend aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ (bei einer beliebig festgestellten Anordnung der Elemente a, b, c) nur die Tripel von der Form (3.1) zu beachten.

Wir fassen unsere vorstehenden Bemerkungen zusammen. Bezeichne $S_{\nu k}^{(3)}$ die Gesamtheit aller Tripel aus $S_\nu^{(3)}$, die nach der obigen Reduktion noch weiter zu untersuchen sind. Also bestehe $S_{\nu k}^{(3)}$ aus allen Tripeln vom Typ (a, a, b) und aus den Tripeln (3. 1) aller Klassen $C[a, b, c]$. Ferner werde die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen, von denen jede einzelne zu einem Tripel von $S_{\nu k}^{(3)}$ gehört, kurz „das reduzierte System (der Assoziativitätsbedingungen)" genannt. Dann lassen sich die obigen Überlegungen folgendermaßen zusammenfassen: *Abgesehen von Äquivalenz entstehen alle unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen so, daß man nur die sämtlichen unabhängigen vollständigen Teilsysteme des reduzierten Systems bildet.* Deshalb brauchen wir in den folgenden nach der Assoziativität hin nur die Tripel von $S_{\nu k}^{(3)}$ zu untersuchen und statt unserer obigen Sätze die folgenden, mit ihnen gleichwertigen Behauptungen nachzuweisen:

Behauptung 1. *Im Fall $\nu \geqq 4$ enthält ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ genau zwei beliebig ausgewählte Assoziativitätsbedingungen von der Form* (4. 1).

Behauptung 2. *Im Fall $\nu = 3$ enthält ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems aus der einzigen Klasse $C[a, b, c]$ genau eine beliebig ausgewählte Assoziativitätsbedingung von der Form* (4. 1).

Behauptung 3. *Im Fall $\nu \geqq 3$ enthält ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems alle Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b).*

Behauptung 4. *Im Fall $\nu = 2$ besteht ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems aus einer einzigen Assoziativitätsbedingung; für sie kann man beliebig entweder die zum Tripel (a, a, b) oder die zum Tripel (b, a, a) gehörende nehmen.*

§ 3. Beweis der Behauptung 1.

Zuerst zeigen wir, daß im Fall $\nu \geqq 4$ ein vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems, wenn es ein unabhängiges ist, aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ *höchstens* zwei Assoziativitätsbedingungen (von der Form (4. 1)) enthalten darf. Mit anderen Worten: *Sind in einer Klasse $C[a, b, c]$ der Assoziativitätsbedingungen von $S_\nu (\nu \geqq 4)$ zwei beliebige, zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörende Assoziativitätsbedingungen erfüllt, so ist schon die dritte zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörende Assoziativitätsbedingung dieser Klasse auch erfüllt.*

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß in der Klasse $C[a, b, c]$ die Assoziativitätsbedingungen (a, b, c) und (b, c, a) erfüllt sind; d. h. daß die Gleichungen

(5) $$(ab)c = a(bc)$$

und

$$(bc)a = b(ca) \tag{6}$$

gelten. Wegen der Kommutativität ergibt sich sofort

$$c(ab) = (ab)c = a(bc) = (bc)a = b(ca) = (ca)b,$$

also

$$(ca)b = c(ab). \tag{7}$$

Gleichung (7) bedeutet aber, daß auch die dritte Assoziativitätsbedingung von der Form (4. 1) der betrachteten Klasse $C[a, b, c]$ erfüllt ist. Man sieht ähnlich ein, daß aus den Gleichungen (6) und (7) auch schon (5), aus (7) und (5) auch schon (6) folgt.

Wir haben noch zu zeigen, daß ein unabhängiges Teilsystem des reduzierten Systems nur dann vollständig sein kann, wenn es aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ *mindestens* zwei Assoziativitätsbedingungen (von der Form (4. 1)) enthält. Ausführlicher gesagt: *Es sei $C[a, b, c]$ eine beliebige Klasse der Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, b, c), und nehme man das Erfülltsein aller nicht in $C[a, b, c]$ liegenden Assoziativitätsbedingungen des reduzierten Systems an. Man kann doch eine Struktur $S_\nu^\times$ ($\nu \geqq 4$) angeben, in der auch noch aus $C[a, b, c]$ eine Assoziativitätsbedingung von der Form* (4. 1) *erfüllt, die beiden anderen aber nichterfüllt sind.*

Dazu betrachten wir die Struktur $S_\nu^\times$, in der die Multiplikation durch die Gleichungen

$$\begin{cases} ac(=ca) = bb = b \\ xy = d \qquad\qquad \text{übrigens} \end{cases} \tag{8}$$

definiert ist, wo d ein von a, b, c verschiedenes, übrigens aber beliebig festgestelltes Element von S_ν bedeutet.

Nach (8) sind keine Produkte von zwei Elementen gleich a oder c; folglich ist $(xy)z$ gleich b oder d. Ferner ist aber auch $(xy)z = b$ dann und nur dann, wenn $xy = b$, $z = b$ ist, also in den folgenden drei Fällen:

$$x = a, \quad y = c, \quad z = b, \tag{9.1}$$

$$x = c, \quad y = a, \quad z = b, \tag{9.2}$$

$$x = b, \quad y = b, \quad z = b. \tag{9.3}$$

(In allen übrigen Fällen gilt $(xy)z = d$.) Man sieht sofort, daß die Tripel in (9. 1) und (9. 3) nicht zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehören. Das Tripel in (9. 2) ist aber eines von $S_{\nu k}^{(3)}$, so daß wir für die Elemente von $S_{\nu k}^{(3)}$ das folgende Ergebnis bekommen haben:

$$\begin{cases} (ca)b = b, & \text{aber} \\ (xy)z = d & \text{für alle übrigen } (x, y, z) \in S_{\nu k}^{(3)}. \end{cases} \tag{10}$$

Andererseits folgt, wieder aus $xy \neq a, c$ für alle Paare x, y, daß $x(yz) = b$ dann und nur dann gilt, wenn $x = b$, $yz = b$ ist, also in der folgenden drei Fällen:

$$(11.1) \qquad x = b, \quad y = a, \quad z = c,$$
$$(11.2) \qquad x = b, \quad y = c, \quad z = a,$$
$$(11.3) \qquad x = b, \quad y = b, \quad z = b;$$

sonst gilt $x(yz) = d$. Die Tripel in (11.1) und (11.3) gehören auch jetzt nicht zu $S_{\nu k}^{(3)}$. Das Tripel in (11.2) ist aber eines von $S_{\nu k}^{(3)}$, so daß für die Elemente von $S_{\nu k}^{(3)}$

$$(12) \qquad \begin{cases} b(ca) = b, & \text{aber} \\ x(yz) = d & \text{für alle übrigen } (x, yz) \in S_{\nu k}^{(3)} \end{cases}$$

gelten.

Vergleicht man die Resultate (10) und (12), so sieht man sofort, daß in dieser Struktur die zu den Tripeln (b, c, a), (c, a, b) gehörenden Assoziativitätsbedingungen nichterfüllt, die zu den übrigen Tripeln von $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörenden aber erfüllt sind.

Durch die Gleichungen (8) haben wir also in der Tat ein $S_\nu^\times$ von gewünschter Art konstruiert, womit unsere Behauptung 1 völlig bewiesen ist.

§ 4. Beweis der Behauptung 2.

Wir bemerken im voraus, daß uns der nächstfolgende Beweis im Vergleich mit den übrigen unverhältnismäßig große Schwierigkeiten machen wird.

Ähnlich wie vorher, brauchen wir im Fall $\nu = 3$ folgendes nachzuweisen:

4.1. Ein unabhängiges Teilsystem des reduzierten Systems kann nur dann ein vollständiges sein, wenn es *mindestens* eine Assoziativitätsbedingung vom Typ (a, b, c) (natürlich von der Form (4.1)) enthält;

4.2. Ein vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems, wenn es ein unabhängiges ist, enthält *höchstens* nur eine solche Assoziativitätsbedingung.

Um 4.1 nachzuweisen, geben wir ein $S_3^\times$ an, in dem aus den zu $S_{3k}^{(3)}$ gehörenden Assoziativitätsbedingungen alle vom Typ (a, a, b) erfüllt, dagegen alle vom Typ (a, b, c) nichterfüllt sind. Und zwar zeigen wir, daß die Struktur $S_\nu^\times$ mit der Cayleyschen Tafel

$$(13) \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & a & b & b \\ c & c & b & c \end{array}$$

eine solche ist.

Man sieht sofort, daß in der durch (13) gegebenen Struktur je zwei aus den Elementen a, b, c eine Unterstruktur bilden; es ist auch leicht zu sehen, daß diese Unterstrukturen assoziativ sind. Dies bedeutet, daß allerdings alle solchen Assoziativitätsbedingungen erfüllt sind, die höchstens zwei verschiedene Elemente von S_3 enthalten. Insbesondere sind also alle Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b) erfüllt.

Für die drei Tripel vom Typ (a, b, c) von $S_{3k}^{(3)}$ gewinnen wir aber aus (13)

$$\begin{aligned} (ab)c = ac = c, \quad & a(bc) = ab = a; \\ (bc)a = ba = a, \quad & b(ca) = bc = b; \\ (ca)b = cb = b, \quad & c(ab) = ca = c; \end{aligned}$$

also

$$(ab)c \neq a(bc), \quad (bc)a \neq b(ca), \quad (ca)b \neq c(ab),$$

womit wir die Richtigkeit von 4.1 gezeigt haben.

Der Nachweis von 4.2 wird auf indirektem Wege stattfinden. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fall, daß aus den zu $S_{3k}^{(3)}$ gehörenden Assoziativitätsbedingungen alle vom Typ (a, a, b) und sogar die zu (c, a, b) gehörende erfüllt sind, und nehmen an, daß trotzdem die zu (a, b, c) und (b, c, a) gehörenden nichterfüllt sind. Es gelten also für die Tripel von $S_{3k}^{(3)}$

(14) $\quad (xx)y = x(xy)$ für alle $x, y \in S_3$,

(15) $\quad (ca)b = c(ab)$,

(16) $\quad (ab)c \neq a(bc)$,

(17) $\quad (bc)a \neq b(ca)$.

Wir werden nach den möglichen Werten der Produkte $(ab)c$, $a(bc)$, $(bc)a$, $b(ca)$ eine Fallunterscheidung machen. Es gilt wegen der Kommutativität

(18) $\quad a(bc) = (bc)a;$

ferner folgt aus (15), wieder wegen der Kommutativität,

(19) $\quad b(ca) = (ca)b = c(ab) = (ab)c.$

Nach (16)—(19) brauchen wir also nur die folgenden sechs Fälle zu unterscheiden:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$(ab)c =$	a	b	b	c	c	a
$a(bc) = (bc)a =$	b	a	c	b	a	c
$b(ca) =$	a	b	b	c	c	a

Vertauscht man überall die Rolle von b und c, so gehen die Bedingungsgleichungen der Fälle 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4 bzw. ineinander über. Es genügt also die Unmöglichkeit der Fälle 1 bis 3 zu zeigen. Dies wird meistens dadurch geschehen, daß wir aus den Bedingungsgleichungen in den Fällen 1 bis 3, im Widerspruch gegen unsere Annahme (14), auf die Nichtassoziativität je eines Tripels vom Typ (a, a, b) schließen werden.

Fall 1. Die Bedingungsgleichungen sind jetzt

(20. 1) $\quad (ab)c = a,$

(20. 2) $\quad a(bc) = b,$

(20. 3) $\quad b(ca) = a.$

Entsprechend den drei möglichen Werten des Produktes ab unterscheiden wir die drei Unterfälle $ab=a$, $ab=b$ und $ab=c$.

1.1. Im Fall $ab=a$ folgt aus (20.1) $ac=a$, so daß der Wert des Produktes bc, mit Rücksicht auch auf (20.2), weder b noch c sein mag. Es gilt also $bc=a$. Hieraus ergibt sich, wieder nach (20.2), $aa=b$. Wir gewinnen also

$$(aa)c = bc = a, \quad a(ac) = aa = b,$$

d. h. die Nichtassoziativität von (a, a, c).

1.2. Im Fall $ab=b$ folgt aus (20.1)

$$bc = a, \tag{21}$$

und hieraus folgt weiter, nach (20.2), $aa=b$. Letzteres ergibt, wegen der Assoziativität des Typs (a, a, b),

$$bb = (aa)b = a(ab) = ab = b. \tag{22}$$

Nach (22) und (21) ist

$$(bb)c = bc = a, \quad b(bc) = ba = ab = b.$$

Wir haben so auf die Nichtassoziativität des Tripels (b, b, c) geschloßen.

1.3. Im Fall $ab=c$ werden wir auf die Nichtassoziativität von (c, c, a) schließen.

Aus $ab=c$ folgt, erstens nach (20.2),

$$(cb=)\, bc \neq b, \tag{23}$$

zweitens nach (20.1),

$$cc = a. \tag{24}$$

Letzteres ergibt, wegen der Assoziativität von (c, c, b),

$$c(cb) = (cc)b = ab = c. \tag{25}$$

Dies bedeutet, mit Rücksicht auf (24), daß cb nicht gleich c ist. Wegen (23) bleibt also für cb nur die Möglichkeit $cb=a$. Setzen wir es in (25) bzw. in (20.2) ein, so bekommen wir die Relationen

$$ca = c, \tag{26}$$

$$aa = b. \tag{27}$$

Nun folgt aus (24), (27) bzw. aus (26), (24)

$$(cc)a = aa = b, \quad c(ca) = cc = a,$$

womit wir in der Tat die Nichtassoziativität von (c, c, a) gewonnen haben.

Fall 2. Die Bedingungsgleichungen lauten jetzt folgenderweise:

$$(ab)c = b, \tag{28.1}$$

$$a(bc) = a, \tag{28.2}$$

$$b(ca) = b. \tag{28.3}$$

Wir sehen sofort, daß in diesem Fall $ab=b$ nicht möglich ist. Aus $ab=b$ würde nämlich nach (28.1) $bc=b$, und hieraus weiter nach (28.2) $ab=a$

folgen. Wir haben aber $a \neq b$ vorausgesetzt, weshalb $ab = b$ und $ab = a$ nicht gleichzeitig bestehen mögen.

Wir brauchen also nur noch die Unterfälle $ab = a$ und $ab = c$ zu unterscheiden.

2. 1. Wenn $ab = a$ ist, dann gilt nach (28. 1)

$$ac = b. \tag{29}$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (28. 2),

$$bc \neq c. \tag{30}$$

Wir untersuchen jetzt den Wert des Produktes aa. Vermöge der Assoziativität von (a, a, b) gilt

$$(aa)b = a(ab) = aa,$$

so daß, mit Rücksicht auch auf (30), $aa = c$ unmöglich ist. Nun gilt aber, vermöge der Assoziativität von (a, a, c) und nach (29),

$$(aa)c = a(ac) = ab = a, \tag{31}$$

so daß wieder nach (29) auch $aa = a$ unmöglich ist. Es bleibt also nur die Möglichkeit $aa = b$ übrig.

Aus $aa = b$ würde aber nach (31) $bc = a$, und hieraus nach (28. 2) $aa = a$, also ein trivialer Widerspruch folgen.

Damit ist die Unmöglichkeit dieses Unterfalles gezeigt.

2. 2. In dem Unterfall $ab = c$ ist leicht zu sehen, daß das Produkt ac nicht gleich a oder c sein kann. Es würde nämlich aus $ac = a$ nach (28. 3) $(ab =) ba = b$, und aus $ac = c$ zuerst nach (28. 3) $bc = b$, dann hieraus weiter nach (28. 2) $ab = a$ folgen, was in beiden Fällen einen Widerspruch gegen unsere Ausgangsannahme $ab = c$ bedeutet.

Es soll also

$$ac = b$$

gelten, woraus wir, mit Rücksicht auf (28. 2),

$$bc \neq c$$

bekommen.

Ferner ergibt sich, als eine unmittelbare Folgerung von (28. 1) und der Ausgangsannahme $ab = c$, die Gleichung

$$cc = b.$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt aber

$$(cc)a = ba = c, \quad c(ca) = cb \neq c,$$

d. h. die Nichtassoziativität des Tripels (c, c, a).

Fall 3. Es gelten jetzt als Bedingungsgleichungen

$$(ab)c = b, \tag{32. 1}$$

$$a(bc) = c, \tag{32. 2}$$

$$b(ca) = b. \tag{32. 3}$$

Wir sehen sofort, daß in diesem Fall $ab=b$ unmöglich ist. Denn aus $ab=b$ würde sich nach (32. 1) $bc=b$, und hieraus nach (32. 2) $ab=c$ ergeben. Wir brauchen also nur die Unterfälle $ab=a$ und $ab=c$ zu betrachten.

3. 1. Ist $ab=a$, so folgt aus (32. 1) $ac=b$. Wegen (32. 2) soll also $bc\neq b$ und $bc\neq c$ bestehen; folglich ist $bc=a$. Setzen wir es in (32. 2) ein, so ergibt sich $aa=c$. Aus den beiden letzteren Relationen gewinnen wir

$$(aa)b=cb=a, \quad a(ab)=aa=c,$$

was die Nichtassoziativität von (a, a, b) bedeutet.

3. 2. Ist endlich $ab=c$, so folgt aus (32. 1)

(33) $$cc=b,$$

und aus (32. 3)

(34) $$ca\neq a.$$

Aus der Assoziativität von (c, c, a) folgt weiter, mit Rücksicht auch auf (33),

$$c(ca)=(cc)a=ba=c,$$

weshalb, wieder nach (33),

(35) $$ca\neq c$$

ist. Nach (34) und (35) gilt also

(36) $$(ac=)ca=b.$$

Setzt man dies in (32. 3) ein, so ergibt sich

(37) $$bb=b.$$

Vergleicht man ferner (36) mit (32. 2), so sicht man sofort, daß

(38) $$bc\neq c$$

ist.

Nun gelten aber nach (37) und (38)

$$(bb)a=ba=c, \quad b(ba)=bc\neq c,$$

was die Nichtassoziativität von (b, b, a) bedeutet.

Damit haben wir den Beweis der Behauptung 2 beendigt.

§ 5. Beweis der Behauptung 3.

Um die Behauptung 3 nachzuweisen, betrachten wir ein beliebig ausgewähltes Tripel (a, a, b) aus $S_\nu^{(3)}$ $(\nu \geqq 3)$, und werden dazu ein $S_\nu^\times$ angeben, in der die Assoziativitätsbedingung (a, a, b) nichterfüllt ist, obgleich alle übrigen aus dem reduzierten System erfüllt sind. Damit wird gezeigt, daß das Erfülltsein der (beliebigen) Assoziativitätsbedingung (a, a, b) aus dem aller übrigen zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörenden überhaupt nicht folgt, was offenbar schon die Richtigkeit der fraglichen Behauptung bedeutet.

Zu diesem Zweck bilden wir ein (kommutatives) $S_\nu^\times$ durch die folgenden Multiplikationsregeln:

$$(39) \qquad \begin{cases} ab(=ba)=bb=b, \\ xy=c \quad \text{übrigens,} \end{cases}$$

wo c ein beliebig festgewähltes, nur von a und b verschiedenes Element von S_ν ist. Es ist leicht zu sehen, daß für das Tripel (x, y, z), wo keins der Elemente x, y, z den Elementen a, b gleich ist, stets $(xy)z=c$, $x(yz)=c$ gelten; die Assoziativitätsbedingungen sind also für diese Tripel (x, y, z) alle erfüllt. Man braucht deshalb nur solche Tripel (x, y, z) von $S_{\nu k}^{(3)}$ weiter zu untersuchen, in denen die Elemente x, y, z alle gleich a oder b sind. Es gibt zwei Tripel solcher Art, nämlich (a, a, b) und (b, b, a), wofür aber die Gleichungen

$$(aa)b=cb=c, \quad a(ab)=ab=b$$

und

$$(bb)a=ba=b, \quad b(ba)=bb=b$$

gelten.

Damit haber wir gezeigt, daß die Struktur (39) die gewünschten Eigenschaften besitzt.

§ 6. Beweis der Behauptung 4.

In diesem Fall besteht das reduzierte System aus zwei Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b), nämlich aus

$$(40.1) \qquad (aa)b=a(ab)$$

und

$$(40.2) \qquad (bb)a=b(ba).$$

Auf Grund dieser Tatsache kann sich der Leser leicht überzeugen, daß es unter den acht verschiedenen kommutativen $S_2^\times$ nur die mit den Cayleyschen Tafeln

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & a \end{array}$$

angegeben keine Halbgruppen sind; in diesen sind aber (40. 1), (40. 2) nichterfüllt. Stellt man also in einem $S_2^\times$ das Erfülltsein nur einer von der Assoziativitätsbedingungen (40. 1), (40. 2) fest, so kann man schon auf das Erfülltsein aller übrigen schließen. Das bedeutet aber gerade die Richtigkeit der Behauptung 4.

Zum Schluß bemerken wir, daß im Fall $\nu=1$, da die einzige Struktur $S_1^\times$ trivialerweise assoziativ ist, das „unabhängige vollständige System der Assoziativitätsbedingungen" von S_1 leer ist (sogar auch die Menge $S_{1k}^{(3)}$).

(Eingegangen am 8. Dezember 1953.)

Über als echte Quotientenkörper darstellbare Körper.

Von E. FRIED in Budapest.

Von P. TURÁN stammt das folgende Problem: Welche sind diejenigen Körper K, die als echte Quotientenkörper darstellbar sind, d. h. die einen echten Teilintegritätsbereich I enthalten, dessen Quotientenkörper K ist? Eine Antwort auf diese Frage liefert die Bewertungstheorie: denn jeder Körper, der nichttrivial bewertet werden kann, d. h. einen Bewertungsring B enthält, hat ersichtlich die erwähnte Eigenschaft. Somit bleiben nur die algebraischen Erweiterungen von endlichen Körpern zu untersuchen, und man zeigt mühelos, daß diese die fragliche Eigenschaft nicht besitzen (s. unten). In dieser kurzen Note wollen wir das gestellte Problem unabhängig von der Bewertungstheorie lösen; der Beweis ist völlig elementar, nur an einer Stelle werden wir von dem Zornschen Lemma Gebrauch machen.

Satz. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Körper K sich als echter Quotientenkörper darstellen läßt, ist, daß K von einer algebraischen Erweiterung eines endlichen Körpers verschieden ist.*

Zuerst beweisen wir, daß die im Satze angegebene Bedingung notwendig ist. Es sei K eine algebraische Erweiterung irgendeines endlichen Körpers und I ein Integritätsbereich in K, der von K verschieden ist. Dann sind alle Elemente $\alpha \in I$ algebraisch über dem Primkörper Π von K, d. h. $a_n\alpha^n + \cdots + a_0 = 0$ $(a_i \in \Pi)$. Da Π von Primzahlcharakteristik ist, können wir, im Falle $\alpha \neq 0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 = 1$ annehmen, woraus man unmittelbar folgern kann, daß $\frac{1}{\alpha}$ zu I gehört. Dies beweist, daß der Quotientenkörper von I mit I zusammenfällt, und somit ein echter Teil von K ist.

Um das Hinreichen zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem K eine algebraische oder transzendente Erweiterung seines Primkörpers Π ist.

Es sei K algebraisch über Π. Genügt K der im Satze angegebenen Bedingung, so ist Π dem Körper der rationalen Zahlen isomorph. Nehmen wir den Ring I aller Elemente von K, die in bezug auf I_0 ganz algebraisch sind, wo I_0 den dem Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen isomorphen Unterring von Π bezeichnet, so ist I ein echter Unterring von K und es gilt offenbar, daß der Quotientenkörper von I gleich K ist.

Ist K transzendent über Π, so sei τ ein transzendentes Element in K. Da sich die Menge derjenigen Unterkörper von K, über denen τ transzendent ist, ersichtlich als induktiv erweist, erhält man nach dem Zornschen Lemma, daß es einen maximalen Unterkörper K' von K gibt, über welchem τ transzendent ist. Jedes Element $\alpha \in K$ ist notwendigerweise algebraisch über $K'(\tau)$ — dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß im Falle $\alpha \notin K'$, τ algebraisch über $K'(\alpha)$ sein muß, d. h. α und τ voneinander algebraisch abhängig sind. Nun ist $I_0 = K'[\tau]$ ein echter Unterring von K, der selbst kein Körper ist. Für dieses I_0 sei I wie oben definiert. Dann ist I in K echt enthalten und hat K zum Quotientenkörper, q. e. d.

Es ist leicht, auch eine Anwendung unseres Ergebnisses anzugeben. Wenn man nach dem Vorbild des GAUSSschen Lemmas untersucht, zu welchen Körpern K es einen echten Unterring I gibt, so daß die Irreduzibilität eines Polynoms über I die über K nach sich zieht, so sieht man sofort ein, daß eben die im Satz angegebenen Körper diese Eigenschaft besitzen; man kann dann für I jeden Bewertungsring B wählen.

(Eingegangen am 22. Dezember 1953.)

On a theorem of Mautner.

By L. PUKÁNSZKY in Szeged.

It is a few years ago that MAUTNER succeeded to prove an important result (cf. [3] Theorem 1) which asserts that every continuous unitary representation of a locally compact topological group in a Hilbert space can be decomposed into a continuous sum of irreducible continuous unitary representations. Roughly speaking this means that the space in which the given representation acts is represented as the direct sum of "virtual" subspaces, each "reducing" every operator of the representation, and such that, in each subspace, the "reduced" operators constitute a continuous irreducible representation of the group. This result generalizes the well-known fact, that a finite-dimensional space, in which a unitary representation is given, is the direct sum of mutually orthogonal minimal[1]) subspaces. In the formulation and proof of the above results fundamental role is played by the Reduction Theory of J. v. NEUMANN (cf. [5]).

In the course of a further discussion a natural question is how much the properties of the given representation are reflected in its decomposition. In particular, since the infinite dimensional representations in general have no minimal subspaces, it is of interest to obtain criteria in terms of the direct decomposition, which allow to conclude to the existence of such a subspace. In this connection the following theorem of MAUTNER is of importance (cf. [3] Theorem 3. 1):

Assumptions: Let $\mathfrak{H}$ be a separable Hilbert space and $\mathfrak{A}$ a family of bounded operators on $\mathfrak{H}$. Suppose that $\mathfrak{H}$ is the generalized direct sum of the Hilbert spaces $\mathfrak{H}_\lambda$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$ with the weight function $\sigma(\lambda)$ (cf. [5] Definition 1) such that the operators of the family $\mathfrak{A}$ are decomposable, i. e. each $A\in\mathfrak{A}$ is the generalized direct sum of a system of operators $A(\lambda)$, in symbols $A\sim\Sigma A(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$ (cf. [5] Definition 4). Since these decompositions $A(\lambda)$ for $A\in\mathfrak{A}$ are determined only up to a set of σ-measure 0, choose for

[1]) Given a family of operators $\mathfrak{A}$ in Hilbert space $\mathfrak{H}$, a subspace $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{H}$ is a minimal subspace with respect to $\mathfrak{A}$, if it is invariant under the operators of $\mathfrak{A}$, and has no proper subspaces enjoying the same property.

each $A \in \mathfrak{A}$ a representative $A(\lambda)$ from the class of operator valued functions $\bar{A}(\lambda)$ satisfying $A \sim \Sigma \bar{A}(\lambda)$, and suppose that, for each λ except those in a certain σ-null-set, $\mathfrak{H}_\lambda$ is irreducible under the family $\{A(\lambda)\}$. Suppose further that there exist at most countably many disjoint sets T_n $(n=1,2,\ldots)$ on the real line such that the complement of $\bigcup_n T_n$ is of σ-measure 0, and that for any λ and λ' in the same set T_n there exists a unitary operator $U(\lambda,\lambda')$ from $\mathfrak{H}_\lambda$ onto $\mathfrak{H}_{\lambda'}$ such that

$$A(\lambda') = U(\lambda,\lambda')A(\lambda)U^{-1}(\lambda,\lambda') \qquad \text{for all } A \in \mathfrak{A}.$$

Theorem A.[2]) *Under the above assumptions $\mathfrak{H}$ has proper minimal invariant subspaces with respect to the family $\mathfrak{A}$.*

Applying this theorem to unitary representations, it ensures the existence of a minimal invariant subspace under a representation if in its direct decomposition only countably many inequivalent irreducible representations occur (except for a set of σ-measure 0).

The purpose of the present note is to prove a theorem which generalizes Theorem A as far as we do not require the irreducibility of $\mathfrak{H}_\lambda$ under the family $\mathfrak{A}$. More precisely we prove the following

Theorem B. *Suppose that all assumptions of Theorem A are satisfied with the exception that the spaces $\mathfrak{H}_\lambda$ need not be irreducible under the families $\{A(\lambda)\}$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$. Then there exists a subspace $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{H}$, invariant under the operators of $\mathfrak{A}$, and a unitary mapping U from $\mathfrak{M}$ onto $\mathfrak{H}_{\lambda_0}$ $(\lambda_0 \in T_n$, for a suitable $n)$, such that we have for all $A \in \mathfrak{A}$*

$$A(\lambda_0) = UA_{(\mathfrak{M})}U^{-1}$$

where $A_{(\mathfrak{M})}$ denotes the restriction of A in $\mathfrak{M}$.

Our proof follows closely the lines of the reasoning in [5], lemma 6 and lemma 7, p. 451.

Proof of Theorem B:

Since the complement of $\bigcup_n T_n$ is a σ-null-set, there exists necessarily an n for which T_n is not a σ-null set; we denote this set simply by T. Obviously the spaces $\mathfrak{H}_\lambda$ $(\lambda \in T)$ have all the same dimension. We assume that this dimension is ∞; the case when this dimension is a finite number may be treated quite similarly. We denote by Δ_∞ the set of those λ, for which $\dim \mathfrak{H}_\lambda = \infty$. Then Δ_∞ is σ-measurable ([5] Theorem 1) and $T \subset \Delta_\infty$.

Choose a measurable family $\varphi_k(\lambda)$ $(k=1,2,\ldots)$ (cf. [5] Definition 2), a Hilbert space $\mathfrak{H}_0$, a complete orthonormal system ψ_k $(k=1,2,\ldots)$ in it, and define an isomorphism J_λ between $\mathfrak{H}_\lambda$ $(\lambda \in \Delta_\infty)$ and $\mathfrak{H}_0$ under which $\varphi_k(\lambda)$

[2]) The proof given in [3] is incomplete, because of the lacking justification for the assertion, that the closure of an algebraic operator-ring in the strong topology coincides with its strong sequential closure. But as Mr. J. Dixmier kindly informed me, this follows in the case of a separable Hilbert space from Theorem 1 in [1], as it is easily seen.

corresponds to ψ_k $(k=1,2,\ldots)$. Let λ_0 be a point of T. Applying now a theorem of J. v. NEUMANN (cf. [4] p. 386) we can select a countable subfamily $\mathfrak{A}_0$ from $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{A}_0$ and $\{A(\lambda_0)\}$ $(A\in\mathfrak{A}_0)$ are dense in $\mathfrak{A}$ and $\{A(\lambda_0)\}$ $(A\in\mathfrak{A})$, respectively, in the strong sequential topology. Let A_k $(k=1,2,\ldots)$ be the elements of $\mathfrak{A}_0$ with the decompositions $A_k\sim\Sigma A_k(\lambda_0)$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$. Put

$$\widetilde{A}_k(\lambda)=\begin{cases} J_\lambda A_k(\lambda)J_\lambda^{-1} & \text{for } \lambda\in\Delta_\infty \\ O & \text{for } \lambda\notin\Delta_\infty \end{cases} \quad (k=1,2,\ldots).$$

Form as in [5], lemma 6, the product space $r\times S$, where r is the set of real numbers, S the space of all linear transformations in $\mathfrak{H}_0$ with a norm $\leqq 1$ in their weak topology. Then $r\times S$ is a complete separable metric space (cf. [5], pp. 447—448). Consider now the set B of pairs (λ, V) $(-\infty<\lambda<\infty;$ $V\in S)$ in $r\times S$ satisfying the following equations:

$$(*)\qquad \left.\begin{aligned} (\widetilde{A}_k(\lambda)V\psi_\nu, V\psi_\mu) &= (\widetilde{A}_k(\lambda_0)\psi_\nu, \psi_\mu) \\ (V\psi_\nu, V\psi_\mu) &= \delta_{\nu\mu} \\ (V^*\psi_\nu, V^*\psi_\mu) &= \delta_{\nu\mu} \end{aligned}\right\} (k, \nu, \mu=1,2,\ldots).$$

We show now similarly as it is done in [5], lemma 6, that B is a Borel set in the space $r\times S$, at least if the $\widetilde{A}_k(\lambda)$ are previously modified on a suitable set of σ-measure 0, independent of k. Since

$$(\widetilde{A}_k(\lambda)V\psi_\nu, V\psi_\mu)=\Sigma_{\varrho,\tau}(V\psi_\nu, \psi_\varrho)(\widetilde{A}_k(\lambda)\psi_\varrho, \psi_\tau)\overline{(V\psi_\mu, \psi_\tau)},$$
$$(V\psi_\nu, V\psi_\mu)=\Sigma_\tau(V\psi_\nu, \psi_\tau)\overline{(V\psi_\mu, \psi_\tau)},$$
$$(V^*\psi_\nu, V^*\psi_\mu)=\Sigma_\tau(\psi_\nu, V\psi_\tau)\overline{(\psi_\mu, V\psi_\tau)},$$

we need only to make the functions $f_{k,\mu,\nu}(\lambda)=(\widetilde{A}_k(\lambda)\psi_\mu, \psi_\nu)$ Borel measurable, because the functions $(V\psi_\nu, \psi_\mu)$ (of V) are clearly continuous functions in $r\times S$. But since the set of these functions is countable we can find a set $N\subset\Delta_\infty$ of σ-measure 0, such that if we put $\widetilde{\widetilde{A}}_k(\lambda)=\widetilde{A}_k(\lambda)$ on $\Delta_\infty-N$ and $\widetilde{\widetilde{A}}_k(\lambda)=0$ on N $(k=1,2,\ldots)$, then the functions $(\widetilde{\widetilde{A}}_k(\lambda)\psi_\mu, \psi_\nu)$ become Borel measurable (in the following we write again $\widetilde{A}_k(\lambda)$ instead of $\widetilde{\widetilde{A}}_k(\lambda)$).

Now we apply lemma 5 of [5]. From this it follows that the set K of the λ's for which there exists a $V\in S$ such that $(\lambda, V)\in B$, is σ-measurable, and that there exists a mapping $\lambda\to(\lambda, V(\lambda))$ from K to B such that the inverse image of every open set O in $r\times S$ is also σ-measurable.

We put

$$U(\lambda)=\begin{cases} J_\lambda^{-1}V(\lambda)J_\lambda & \text{if } \lambda\in K\cap\Delta_\infty, \\ O & \text{if } \lambda\notin K\cap\Delta_\infty. \end{cases}$$

If $\lambda\in K$, then $U(\lambda)$ is unitary and depends σ-measurably on λ (cf. [5] Definition 5). Since the proof of the latter statement requires essentially only the repetition of the argument in [5], p. 453, we omit the further discussion.

Observe now that by the definition of the set T, for each $\lambda \in \dot{T}$ there exists a $V \in S$ such that (λ, V) satisfies the equations (*). Since in the course of our construction the operator-valued functions $\tilde{A}_k(\lambda)$ are modified on a set of σ-measure 0 only, the set $T-K$ is a σ-null set. Therefore, by our assumption on T, K is necessarily of positive σ-measure. Put[3])

$$\underline{\omega}_j(\lambda) = U(\lambda)\underline{\varphi}_j(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < +\infty)$$

and

$$\omega_j = \frac{1}{\sqrt{\sigma(K)}} \int_K \underline{\omega}_j(\lambda)\sqrt{d\sigma(\lambda)} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

(cf. [5] Definition 1).

The system $\{\omega_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ is orthonormal in $\mathfrak{H}$, and the correspondence $\omega_k \to \underline{\varphi}_k(\lambda_0)$ defines an isomorphism U between the spaces $\mathfrak{M}$ spanned by the ω_k and $\mathfrak{H}_{\lambda_0}$. Putting

$$a_{j,l}^{(k)} = (A_k(\lambda_0)\underline{\varphi}_j(\lambda_0), \underline{\varphi}_l(\lambda_0)) \qquad (k, j, l = 1, 2, \ldots)$$

we get

$$A_k\omega_j = \frac{1}{\sqrt{\sigma(K)}} \int_K A_k(\lambda)\underline{\omega}_j(\lambda)\sqrt{d\sigma(\lambda)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma(K)}} \int_K (A_k(\lambda)\underline{\omega}_j(\lambda), \underline{\omega}_l(\lambda))\underline{\omega}_l(\lambda)\sqrt{d\sigma(\lambda)} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}^{(k)}\omega_l.$$

This equation shows that $\mathfrak{M}$ is invariant under the family $\mathfrak{A}_0$, and that the above isomorphism carries the restriction of $A \in \mathfrak{A}_0$ in $\mathfrak{M}$ into the operator $A(\lambda_0)$. But by our choice of $\mathfrak{A}_0$ this clearly extends to all operators of $\mathfrak{A}$, i. e. we have

$$A(\lambda_0) = UA_{(\mathfrak{M})}U^{-1} \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

This proves the theorem.

Bibliography.

[1] I. Kaplansky, A theorem on rings of operators, *Pacific Journ. of Math.*, **1** (1951), 227—232.

[2] F. I. Mautner, Unitary representations of locally compact groups I, *Annals of Math.*, **51** (1950), 1—25.

[3] F. I. Mautner, Unitary representations of locally compact groups II, *Annals of Math.*, **52** (1950), 528—555.

[4] J. v. Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen*, **102** (1930), 370—437.

[5] J. v. Neumann, On rings of operators. Reduction theory, *Annals of Math.*, **50** (1949), 401—485.

(Received December 1, 1953.)

[3]) For a similar reasoning cf. [2], p. 12.

The theorem of Radon—Nikodym in operator-rings.

By L. PUKÁNSZKY in Szeged.

Preliminaries. In the following $\mathbf{M}$ denotes a weakly closed ring of operators on a Hilbert space $\mathfrak{H}$, which contains no purely infinite projections, i. e. we suppose that for every projection $P \in \mathbf{M}$ there exists a finite projection[1]) $Q \in \mathbf{M}$ with $Q \leqq P$. As it is shown in [1] (especially ch. V., p. 40) there exists a suitable two-sided ideal $\mathfrak{m}$ of $\mathbf{M}$, and a *positive* linear functional φ defined on $\mathfrak{m}$, with the following additional properties:

(i) For every $B \in \mathbf{M}$ and $A \in \mathfrak{m}$ we have $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

(ii) If $A \in \mathfrak{m}$ is the l. u. b. of an increasing directed set F of positive operators im $\mathfrak{m}$, then we have $\varphi(A) = \underset{A' \in F}{\text{l. u. b.}}\ \varphi(A')$.

(iii) If $\varphi(P) = 0$ for a projection $P \in \mathfrak{m}$, it follows that $P = O$.

(iv) The l. u. b. of the projections[2]) in $\mathfrak{m}$ is the unit operator I.

(v) φ is maximal i. e. it cannot be extended to a two-sided ideal of $\mathbf{M}$ which contains $\mathfrak{m}$ properly.

We shall call such a functional φ a *trace*. Property (v) implies that if $A \in \mathbf{M}$ is the l. u. b. of an increasing directed set F of positive operators in $\mathfrak{m}$ such that the $\underset{A' \in F}{\text{l. u. b.}}\ \varphi(A')$ is finite, then $A \in \mathfrak{m}$, and hence by property (ii) $\varphi(A) = \underset{A' \in F}{\text{l. u. b.}}\ \varphi(A')$ (cf [1] lemma 5. 5). The two-sided ideal generated by the projections of $\mathfrak{m}$ will be denoted by $\mathfrak{m}^r$. For every operator $A \in \mathfrak{m}^r$ there exists a projection P in $\mathfrak{m}$ such that $PA = AP = A$, and for every $A \in \mathbf{M}$, $A \geqq O$, the set of positive operators in $\mathfrak{m}^r$ bounded by A forms an increasing directed set with an upper bound equal to A.

In particular if $\mathbf{M}$ is *finite* (i. e. contains only finite projections) and *σ-finite* (see below) then we can take $\mathfrak{m} = \mathbf{M}$. We shall use also the fact that the restriction of φ to a projection $P \in \mathfrak{m}$, i. e. the functional $\psi(A) = \varphi(PA)$ is continuous in the weak sequential topology [cf. [2], Theorem 3, Corollary 8].

By ϱ and τ we shall denote two positive functionals on M, which are continuous in the strong and hence also in the weak topology if they are

[1]) A projection P in an operator-ring $\mathbf{M}$ is called *finite* if $\mathbf{M}$ contains no partial isometry with initial domain $P\mathfrak{H}$ and terminal domain $Q\mathfrak{H} \subset P\mathfrak{H}$, $Q\mathfrak{H} \neq P\mathfrak{H}$.

[2]) The l. u. b. of a set $\{P_\alpha\}$ of projections in $\mathbf{M}$ is the minimal projection $P \in \mathbf{M}$ such that $P_\alpha \leqq P$ for all $\{P_\alpha\}$.

restricted to the unit sphere [cf. [2], Theorem 2]. ϱ will be supposed *absolutely continuous* with respect to τ, in symbols $\varrho \prec \tau$, in the sense that if $\tau(P)=0$ for a projection $P \in \mathbf{M}$, than we have also $\varrho(P)=0$.

A projection $P \in \mathbf{M}$ is called σ-finite, if every disjoint family of projections in $\mathbf{M}$ bounded by P is at most countable. The ring $\mathbf{M}$ itself is said to be σ-finite if the operator I is σ-finite.

We denote by $\mathfrak{m}_p$ (resp. $\mathbf{M}_p$) the set of projections in $\mathfrak{m}$ (resp. in $\mathbf{M}$).

A closed, densely defined operator T is said to „belong" to $\mathbf{M}$, in symbols $T \eta \mathbf{M}$, if it commutes with every operator in $\mathbf{M}'$.

Introduction. In a recent paper [7] I. E. SEGAL has given a systematic development of a theory of „non-commutative integration" in operator-rings which summarizes in a certain sense the various analogies between the theory of measures and the theory of rings of operators emphasized already by F. MURRAY and J. VON NEUMANN in their fundamental papers and developed by several authors in these years. In particular SEGAL generalizes by aid of this theory a special case of the important extension of the classical Radon—Nikodym theorem by H. A. DYE (cf. [7], Theorem 14, p. 433; and [3], Corollary 5. 1 and Theorem 4, p. 268).

The purpose of the present note is to give an alternative approach to both theorems; instead of SEGAL's theory of integration we use J. DIXMIER's theory of traces in arbitrary operator-rings, cf. [1]. Firstly we prove a theorem (Theorem I) which is equivalent to the theorem of SEGAL cited above, and then, in the case of a finite and σ-finite ring, we derive from this DYE's extension of the Radon—Nikodym theorem (Theorem II). We formulate these theorems as follows:

Theorem I. *Let φ be a trace defined on the two-sided ideal $\mathfrak{m}$ of the ring $\mathbf{M}$. Then to every positive functional ϱ on $\mathbf{M}$ we can find a positive (in general unbounded) operator $H=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, $H \eta \mathbf{M}$, such that for every $A \in \mathbf{M}$ we have*

$$\varrho(A)=\varphi(AH).$$

If H is unbounded, the right-hand side of the last equation is interpreted as $\lim\limits_{\substack{\mu\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \varphi(AH_\varepsilon^\mu)$, where

$$H_\varepsilon^\mu=\int_\varepsilon^\mu \lambda dE_\lambda \in \mathfrak{m}.$$

Theorem II. *If $\mathbf{M}$ is finite and σ-finite, and ϱ and τ are two positive functionals such that $\varrho \prec \tau$ then there exists a closed, densely defined operator T, $T \eta \mathbf{M}$, such that*

$$\varrho(A)=\tau(T^*AT) \qquad \text{for all } A \in \mathbf{M}.$$

If T is unbounded, then, $T=WH$ being the polar decomposition of T and $H=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, $\tau(T^*AT)$ is interpreted as $\lim_{n\to\infty}\tau(T_n^*AT_n)$, where $T_n=TE_n$, $T_n\in\mathbf{M}$.

Our proof of I consists in a direct construction of H by a method which became already classical in the theory of semi-ordered spaces and its applications, especially in the spectral theory and theory of measures cf. [6]. Important role is played in the course of the proof by a lemma which is similar to one used by MURRAY and v. NEUMANN in [5] (cf. lemma II).

1. Firstly we need some lemmas.

Lemma I. (For a similar reasoning cf. [5], lemma 3. 2. 1 and 3. 2. 2.) *φ and ϱ being defined as in Theorem I form the functional $\varrho_\lambda=\varrho-\lambda\varphi$ defined on $\mathfrak{m}$, for $\lambda>0$, and put $m_\lambda=\underset{P\in\mathfrak{m}_p}{\text{l. u. b.}}\,\varrho_\lambda(P)$ $(\leqq\varrho(I))$. Then there exists a projection $E_\lambda\in\mathfrak{m}_p$ such that $\varrho_\lambda(E_\lambda)=m_\lambda$.*

Proof: Put $n_\lambda=\underset{\substack{O\leqq A\leqq I\\ A\in\mathfrak{m}}}{\text{l. u. b.}}\,\varrho_\lambda(A)$; we show first the existence of an operator $A_0\in\mathfrak{m}$ with $\varrho_\lambda(A_0)=n_\lambda$. To do this, we choose a sequence of operators $A_n\in\mathfrak{m}$ $(n=1,2,\dots)$ such that $O\leqq A_n\leqq I$ and $\lim_{n\to\infty}\varrho_\lambda(A_n)=n_\lambda$. Observe that by the properties of ϱ,φ and $\mathfrak{m}^r$ we can choose $A_n\in\mathfrak{m}^r$; from this follows the existence of a sequence of projections $P_n\in\mathfrak{m}$ $(n=1,2,\dots)$ such that $P_nA_n=A_n$ $(n=1,2,\dots)$. Each P_n is σ-finite, because $\varphi(P_n)$ is finite and since $\varphi(P)>0$ for $P\neq O$. Therefore if we put $P=\underset{n=1,2,\dots}{\text{l. u. b.}}\,P_n$, P is the l. u. b. of a sequence of projections of the form $P_{z_\nu}^{\mathbf{M}'}$ [3]) $(\nu=1,2,\dots)$. Using the diagonal process we can determine a subsequence of the sequence A_n (we denote it again by A_n) such that for every fixed ν the sequence A_nz_ν converges weakly in $\mathfrak{H}$. But since the elements of the form $\sum_{\mu=1}^m A'_\mu z_\mu$, $A'_\mu\in\mathbf{M}'$, are dense in $P\mathfrak{H}$, the same is true for any sequence A_ny with $y\in P\mathfrak{H}$ and hence for every sequence A_nx with x arbitrary in $\mathfrak{H}$. Putting

$$\underset{n\to\infty}{\text{weak lim}}\,A_nx=A_0x \quad\text{for}\quad x\in\mathfrak{H}$$

we have evidently $A_0\in\mathbf{M}$, $O\leqq A_0\leqq I$ and, by definition, $A_0=\underset{n\to\infty}{\text{weak lim}}\,A_n$.

Next we show that $\varrho_\lambda(A_0)=n_\lambda$. Observe that by the definition of the A_n's, and by the continuity property of ϱ (cf. Preliminaries) $\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\alpha$ exists, and hence it suffices to show that $A_0\in\mathfrak{m}$ and $\varphi(A_0)=\alpha$. But by the maximal property of φ this is contained in the following statement: if $O\leqq B\in\mathfrak{m}^r$ and $B\leqq A_0$ then $\varphi(B)\leqq\alpha$ (cf. Preliminaries). Indeed $B\in\mathfrak{m}^r$ implies

[3]) $P_z^{\mathbf{M}'}$ denotes the projection on the subspace spanned by the vectors $A'z$ $(A'\in\mathbf{M}')$.

$PB=B$ for some $P\in \mathfrak{m}_p$, hence $B\leqq PA_0P\in \mathfrak{m}$ and $0\leqq \varphi(B)\leqq \varphi(PA_0P)=$ $=\lim_{n\to\infty}\varphi(PA_nP)\leqq \lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\alpha$, φ being weak-sequential continuous if restricted to finite projections.

Finally we show that we may replace A_0 by a projection P_0 enjoying the same maximum property as A_0; P_0 will have then evidently the properties required for E_λ. Let $A_0=\int_0^1 \mu dF_\mu$ be the spectral representation of A_0. Then we have $\varrho_\lambda(A_0F_a)=\int_0^a \mu d(-\varrho_\lambda(I-F_\mu))$ [4]) for every $a\geqq 0$. $\varrho_\lambda(A_0F_a)$ is an increasing function of a; otherwise we could find an interval $\Delta=[\alpha,\beta]$ such that putting $F(\Delta)=F_\beta-F_\alpha$ we should have $\varrho_\lambda(F(\Delta)A_0)<0$, and this would imply $\varrho_\lambda((I-F(\Delta))A_0)>\varrho_\lambda(A_0)$, but this contradicts to the definition of A_0, because plainly $A_0(I-F(\Delta))\in\mathfrak{m}$ and $O\leqq A_0(I-F(\Delta))\leqq I$.

Thus $-\varrho_\lambda(I-F_\mu)$ is an increasing function of μ if $\mu>0$; hence, using also the maximal property of A_0, we have

$$\int_a^1 \mu d(-\varrho_\lambda(I-F_\mu))\leqq \varrho_\lambda(I-F_a)\leqq \varrho_\lambda(A_0)=n_\lambda$$

for every $a>0$. For $a\to 0$ the integral tends to $\varrho_\lambda(A_0)$, thus (noting the definition of ϱ_λ) $I-F_{+0}\in\mathfrak{m}$ and $\varrho_\lambda(I-F_{+0})=n_\lambda$, i. e. $n_\lambda=m_\lambda$.

Note that we may suppose that for any $P\leqq E_\lambda$ with $\varrho_\lambda(P)=0$ we have $P=O$, for otherwise choose a maximal system of orthogonal projections $\{P_\mu\}\leqq E_\lambda$ such that $\varrho_\lambda(P_\mu)=0$. By the countable additivity of ϱ_λ for projections $\leqq E_\lambda$, $E_\lambda-\sum_{\mu=1}^{\infty}P_\mu$ in place of E_λ evidently has the required property.

L e m m a II. (Cf. [4], lemma 3. 3. 1.) *Let E_λ as defined in lemma I. Then for every $A\in\mathbf{M}$ we have $\varrho(AE_\lambda)=\varrho(E_\lambda A)$.*

P r o o f: Evidently it suffices to prove this for ϱ_λ in place of ϱ, and for a self-adjoint $A\in\mathbf{M}$. Consider the function: $\varphi_\varepsilon(\alpha)=\dfrac{1+i\varepsilon\alpha}{1-i\varepsilon\alpha}$ $(\varepsilon\gtrless 0)$. As $|\varphi_\varepsilon(\alpha)|\equiv 1$, $U=\varphi_\varepsilon(A)$ is $\in\mathbf{M}$ and unitary. We have $\varphi_\varepsilon(\alpha)=1+2i\varepsilon\alpha+\varepsilon^2\psi_\varepsilon(\alpha)$ where $\psi_\varepsilon(\alpha)=\dfrac{-2\alpha^2}{1-i\varepsilon\alpha}$, further $\|\psi_\varepsilon(A)\|\leqq 2\|A\|^2$. By the maximal property of E_λ we have

$$\begin{aligned}0&\leqq \varrho_\lambda(E_\lambda)-\varrho_\lambda(UE_\lambda U^*)=\\&=\varrho_\lambda(E_\lambda)-\varrho_\lambda([I+2i\varepsilon A+\varepsilon^2\psi_\varepsilon(A)]E_\lambda[I-2i\varepsilon A+\varepsilon^2\overline{\psi}_\varepsilon(A)])=\\&=2i\varepsilon\varrho_\lambda(AE_\lambda-E_\lambda A)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

---

[4]) Observe that $I-F_{\mu_0}\in\mathfrak{m}$ for $\mu_0>0$ if $A_0\in\mathfrak{m}$ because $I-F_{\mu_0}=A_0T$, where $T=\int_{\mu_0}^1 \mu^{-1}dF_\mu\in\mathbf{M}$.

But this implies the result announced, because ε is arbitrary $\gtrsim 0$.

Remark. We note that by a similar reasoning as applied in lemma I and II we can obtain the following result: *Let ϱ be a real linear functional (i. e. which takes real values for selfadjoint operators) defined on an arbitrary operator-ring* $\mathbf{M}$ *and continuous in the strong* (hence also in the weak) *topology if restricted to the unit sphere of* $\mathbf{M}$ (cf. [2] Theorem 2). *Then ϱ can be represented as the difference of two disjoint positive functionals defined on* $\mathbf{M}$. (Here we call two positive functionals disjoint, if their carrier projections are orthogonal; cf. [3] p. 264). To see this we denote by S the positive part of the unit sphere of $\mathbf{M}$, and determine an operator $A \in S$ such that $\varrho(A) = \sup_{A' \in S} \varrho(A')$. For this it suffices to remark that S is compact in the weak topology and hence the continuous real-valued function $\varrho(A')$ $(A' \in S)$ takes its maximum for an $A \in S$. Next applying the corresponding reasonings of the lemmas I and II (replacing ϱ_λ by ϱ) we can show that A can be taken as a projection $E \in \mathbf{M}$ and that $\varrho(EA) = \varrho(AE)$ for every $A \in \mathbf{M}$. Finally putting $\varrho_1(A) = \varrho(EA)$, $\varrho_2(A) = -\varrho((I-E)A)$ $(A \in \mathbf{M})$, $\varrho = \varrho_1 - \varrho_2$ plainly yields the desired representation.

Lemma III. *For $\lambda \geqq \mu$ we have $E_\lambda \leqq E_\mu$.*

Proof: It follows from the definition of E_λ that if $P \in \mathbf{M}$, $P \leqq E_\lambda$, then we have $\varrho_\lambda(P) \geqq 0$; indeed, $PE_\lambda = P$ gives $P \in \mathfrak{m}_p$ and if $\varrho_\lambda(P) < 0$ then $\varrho_\lambda(E_\lambda - P) > \varrho_\lambda(E_\lambda)$ which contradicts to the definition of E_λ. Hence we have also for every positive $A \in \mathbf{M}$ with $E_\lambda A = A$: $\varrho_\lambda(A) \geqq 0$. Applying lemma II it follows $\varrho_\lambda(E_\lambda(I-E_\mu)) = \varrho_\lambda(E_\lambda(I-E_\mu)E_\lambda) \geqq 0$. Similarly if $A(I-E_\mu) = A$ and $A \in \mathfrak{m}$, $A \geqq O$, we have $\varrho_\mu(A) \leqq 0$ and since $\varrho_\mu(A) \geqq \varrho_\lambda(A)$ for every $A \geqq O$, it follows (again by lemma II)

$$\varrho_\lambda(E_\lambda(I-E_\mu)) = \varrho_\lambda([I-E_\mu]E_\lambda[I-E_\mu]) \leqq \varrho_\mu([I-E_\mu]E_\lambda[I-E_\mu]) \leqq 0.$$

But these inequalities together imply $\varrho_\lambda(E_\lambda(I-E_\mu)) = 0$. From this it follows by the remark at the end of lemma I that $E_\lambda(I-E_\mu)E_\lambda = O$ or $(I-E_\mu)E_\lambda = O$, $E_\lambda = E_\mu E_\lambda$, qu. e. d.

Proof of Theorem I: By lemma III $\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda = E$ exists. The reasoning in lemma III shows that $\varrho_\lambda(E) \geqq 0$ for every $\lambda > 0$, hence $0 \leqq \varphi(E) \leqq \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\varrho(I)}{\lambda} = 0$, which gives $E = O$. Similarly we can put $F = \lim_{\varepsilon \to 0} E_\varepsilon$. If $Q \in \mathfrak{m}_p$ and $Q \leqq I - F$ we have by the above argument $\varrho_\varepsilon(Q) \leqq 0$ for every $\varepsilon > 0$, hence $\varrho(Q) = 0$. But since $I - F$ is the l. u. b. of the projections $Q \in \mathfrak{m}_p$, $Q \leqq I - F$ (cf. Preliminaries; this follows from property (iv) of φ), by the continuity property of ϱ we have $\varrho(I-F) = 0$.

We define now

$$F_\lambda = \begin{cases} O & \text{if } \lambda \leqq 0, \\ I - E_\lambda & \text{if } \lambda > 0; \end{cases} \qquad H = \int_0^\infty \lambda \, dF_\lambda,$$

and show that H satisfies the requirements of Theorem I. For this it suffices to prove that

$$\varrho(AF_\varepsilon^\mu)=\varphi(AH_\varepsilon^\mu) \quad (\text{we put } F_\varepsilon^\mu=F_\mu-F_\varepsilon)$$

for every $A\in\mathbf{M}$ and $\mu>\varepsilon>0$, because by the strong sequential continuity of ϱ and by the definition of F_λ we have $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mu\to\infty}}\varrho(AF_\varepsilon^\mu)=\varrho(A)$.

Consider now a subdivision of the interval $[\varepsilon,\mu]$ by the points $\varepsilon=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_\mu=\mu$. Let Δ_k be the interval $(\lambda_{k-1},\lambda_k)$. For every projection P with $P\leqq F(\Delta_k)=F_{k_\lambda}-F_{\lambda_{k-1}}=E_{\lambda_{k-1}}-E_{\lambda_k}$ we have $0\leqq\varrho_{\lambda_{k-1}}(P)$, and hence for every $A\geqq O$ with $AF(\Delta_k)=A$ we have

$$0\leqq\varrho_{\lambda_{k-1}}(A)=\varrho(A)-\lambda_{k-1}\varphi(A)\leqq(\lambda_k-\lambda_{k-1})\varphi(A).$$

If $A\in\mathbf{M}$ we have by lemma II:

$$|\varrho(AF_\varepsilon^\mu)-\textstyle\sum_{k=1}^n\lambda_{k-1}\varphi(AF(\Delta_k))|\leqq$$

$$\sum_{k=1}^n|\varrho(F(\Delta_k)AF(\Delta_k))-\lambda_{k-1}\varphi(F(\Delta_k)AF(\Delta_k))|\leqq\|A\|\sup_{k=1,2,\ldots}(\lambda_k-\lambda_{k-1})\varphi(F_\varepsilon^\mu).$$

Hence finally, putting $H(\Delta_k)=\int\limits_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\lambda dF_\lambda$, we have for an arbitrary $A\in\mathbf{M}$

$$|\varrho(AF_\varepsilon^\mu)-\varphi(AH_\varepsilon^\mu)|\leqq\sum_{k=1}^n|\varrho(AF(\Delta_k))-\lambda_{k-1}\varphi(AF(\Delta_k))|+$$

$$+\sum_{k=1}^\mu|\varphi(AH(\Delta_k))-\lambda_{k-1}\varphi(AF(\Delta_k))|\leqq 2\|A\|\sup_{k=1,2,\ldots}(\lambda_k-\lambda_{k-1})\varphi(F_\varepsilon^\mu).$$

Since $\sup\limits_{k=1,2,\ldots}(\lambda_k-\lambda_{k-1})$ is arbitrary small the desired equality follows.

2. In the following we shall suppose that $\mathbf{M}$ is a finite and σ-finite ring, ϱ and τ are positive functionals on $\mathbf{M}$ which are strongly continuous on the unit sphere, $\varrho\prec\tau$ and the trace φ is defined for every $A\in\mathbf{M}$, or $\mathfrak{m}=\mathbf{M}$ (for these cf. Preliminaries).

Before passing to the proof of theorem II, we need two lemmas[5]):

L e m m a IV. *Suppose that $\varrho(A)\leqq(Ax,x)$ for a fixed element $x\in\mathfrak{H}$ and for every positive $A\in\mathbf{M}$. Then there exists an $y\in\mathfrak{H}$ such that $\varrho(A)=(Ay,y)$ for every $A\in\mathbf{M}$.*

P r o o f: Consider the subspace $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{H}$ spanned by the elements $\{Tx\}$, $T\in\mathbf{M}$. For $u=Tx$ and $v=Sx$ $(T,S\in\mathbf{M})$ the number $(u,v)_1=\varrho(S^*T)$ depends only on u and v, because by assumption from $Tx=0$ $(T\in\mathbf{M})$ follows

$$0\leqq(Tx,Tx)_1=\varrho(T^*T)\leqq(Tx,Tx)=0 \quad\text{or}\quad (Tx,Tx)_1=0.$$

Hence $(u,v)_1$ defines a bilinear form for the elements $\{Tx\}$ $(T\in\mathbf{M})$ of $\mathfrak{M}$, which is evidently bounded and positive. Therefore it can be extended by continuity to all elements of $\mathfrak{M}$. By a familiar theorem of the theory of oper-

---

5) These are essentially Lemma 2.2 and Theorem 1 in [3]. We repeat the slightly modified proofs for the convenience of the reader.

ators there exists a positive operator B on $\mathfrak{M}$ such that $(u, v)_1 = (Bu, v)$ for every $u, v \in \mathfrak{M}$. Putting $u = Tx, v = Sx, (S, T \in \mathbf{M})$ we have $(BAu, v) = (Au, v)_1 = \varrho(S^* A T) = (u, A^* v)_1 = (ABu, v)$ for every $S, T, A \in \mathbf{M}$ which gives $AB = BA$ on $\mathfrak{M}$ for a fixed A. Hence, finally, putting $y = B^{\frac{1}{2}} x$:

$$\varrho(A) = (BAx, x) = (AB^{\frac{1}{2}}x, B^{\frac{1}{2}}x) = (Ay, y) \qquad (A \in \mathbf{M}).$$

Lemma V. *For every $P \in \mathbf{M}_p$ there exists a $Q \in \mathbf{M}_p$, $Q \leqq P$, and an element $y \in \mathfrak{H}$ such that $\varrho(QAQ) = (Ay, y)$ for $A \in \mathbf{M}$.*

Proof: We need only to show that every $P \in \mathbf{M}_p$ contains a $Q \in \mathbf{M}_p$ such that for every $Q' \leqq Q$, $Q' \in \mathbf{M}_p$, we have $\varrho(Q') \leqq (Q'x, x)$ with a fixed $x \in \mathfrak{H}$. Indeed, from this it follows evidently that $\varrho(A) \leqq (Ax, x)$ for every positive $A \in \mathbf{M}$ such that $QA = A$; but by lemma IV this implies $\varrho(QAQ) = (Ay, y)$ for $A \in \mathbf{M}$ and a suitable $y \in \mathfrak{H}$.

Choose now $x \in P\mathfrak{H}$ such that $\varrho(P) \leqq (x, x)$. If we have $\varrho(Q') \leqq (Q'x, x)$ for $Q' \leqq P, Q' \in \mathbf{M}_p$, then $P = Q$ and x satisfies our requirements. Otherwise choose a maximal system of orthogonal projections $\{P_\alpha\} \in \mathbf{M}_p$ $(\alpha = 1, 2, \dots)$ bounded by P, and such that $\varrho(P_\alpha) > (P_\alpha x, x)$ $(\alpha = 1, 2, \dots)$. We have necessarily $P - \sum_{\alpha=1}^{\infty} P_\alpha \neq O$; for otherwise using the continuity property of ϱ we should have $\varrho(P) > (x, x)$, which contradicts to the choice of x. Hence, putting $Q = P - \sum_{\alpha=1}^{\infty} P_\alpha$, Q evidently meets our requirements.

Proof of Theorem II: Replace ϱ by φ in lemma V and let $\{P_\alpha\}$[6] $(\alpha = 1, 2 \dots)$ be a maximal system of orthogonal projections $\in \mathbf{M}$ enjoying the property described there for Q: for every α $(\alpha = 1, 2, \dots)$ there exists an element $x_\alpha \in \mathfrak{H}$ such that $\varphi(P_\alpha A P_\alpha) = \varphi(P_\alpha A) = (Ax_\alpha, x_\alpha)$ for $A \in \mathbf{M}$. By lemma V we have necessarily $\sum_{\alpha=1}^{\infty} P_\alpha = I$. Using the strong continuity of φ it follows

$$\varphi(A) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi(AP_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (Ax_\alpha, x_\alpha).$$

Applying Theorem I, the positive functionals ϱ and τ can be represented for all $A \in \mathbf{M}$ in the following form: $\varrho(A) = \varphi(AH'')$, $\tau(A) = \varphi(AH')$, where H', H'' are positive hermitian operators belonging to $\mathbf{M}$. Let $H' = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, then we have $H'E_n = H'_n \in \mathbf{M}$ since H' belongs to $\mathbf{M}$, and for every $A \in \mathbf{M}$: $\tau(A) = \lim_{n \to \infty} \varphi(AH'_n)$.

Using the above representation of φ, we have for $n = 1, 2, \dots$

$$\tau(I) \geqq \varphi(H'_n) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \| H_n'^{\frac{1}{2}} x_\alpha \|^2.$$

This shows that every x_α $(\alpha = 1, 2, \dots)$ is in the domain of definition of the (in general unbounded) operator $H'^{\frac{1}{2}}$, and putting $y_\alpha = H'^{\frac{1}{2}} x_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \dots)$

---

[6]) The countability of this system follows from the σ-finiteness of $\mathbf{M}$.

we have $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \|y_\alpha\|^2 < +\infty$. From this follows:

$$\tau(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(H_n' A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(H_n'^{\frac{1}{2}} A H_n'^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} (A H_n'^{\frac{1}{2}} x_\alpha, H_n'^{\frac{1}{2}} x_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (A y_\alpha, y_\alpha) \quad (A \in \mathbf{M}).$$

Similarly, x_α $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ lie in the domain of definition of the operator $H''^{\frac{1}{2}}$, and we have putting $z_\alpha = H''^{\frac{1}{2}} x_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$

$$\varrho(A) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (A z_\alpha, z_\alpha) \quad (A \in \mathbf{M}).$$

To complete our proof it suffices to show the existence of a closed, densely defined operator T belonging to $\mathbf{M}$ such that $z_\alpha = T y_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. To do this we proceed as follows. Since $\varrho \prec \tau$, $\tau(P) = 0$ implies $\varrho(P) = 0$ for $P \in \mathbf{M}_p$. But $\tau(P) = \lim_{n\to\infty} \varphi(H_n' P)$, and observing that $\varphi(P) = 0$ implies $P = O$ for $P \in \mathbf{M}_p$ it follows $H_n' P = O$ $(n = 1, 2, \ldots)$ or $H' P = O$. Similarly $\varrho(P) = 0$ for a $P \in \mathbf{M}_p$ implies $H'' P = O$. Resuming, $\varrho \prec \tau$ implies $H'' P = O$ $(P \in \mathbf{M}_p)$ if $H' P = O$, or $\overline{\text{Range } H'} \supseteq \overline{\text{Range } H''}$. But putting $J = \int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}} dE_\lambda$ $\left(H' = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda\right)$ the closed extension T of $H''^{\frac{1}{2}} J$ plainly satisfies our requirements (for the existence of this extension see [3], p. 264, where the results of [4], pp. 221—229 are generalized to finite rings), for if P_0 is the projection on $\overline{\text{Range } H'}$ we have

$$T y_\alpha = H''^{\frac{1}{2}} J H'^{\frac{1}{2}} x_\alpha = H''^{\frac{1}{2}} P_0 x_\alpha = H''^{\frac{1}{2}} x_\alpha = z_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$

qu. e. d.

Bibliography.

[1] J. Dixmier, Applications $\natural$ dans les anneaux d'opérateurs, *Compositio Math.*, **10** (1952), 1—55.

[2] J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, **81** (1953), 9—39.

[3] H. A. Dye, The Radon—Nikodym theorem for finite rings of operators, *Transactions American Math. Soc.*, **72** (1952), 243—280.

[4] F. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, *Annals of Math.*, **37** (1936), 116—229.

[5] F. Murray and J. von Neumann, On rings of operators II, *Transactions American Math. Soc.*, **41** (1937), 208—248.

[6] F. Riesz, Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Annals of Math.*, **41** (1940), 174—206.

[7] I. E. Segal, A non commutative extension of abstract integration, *Annals of Math.*, **57** (1953), 401—457.

(Received August 18, 1953.)

Über zwei Extremaleigenschaften des Kreisbogens und der Kugelfläche.

Von A. MOÓR und A. TÖRÖK in Debrecen.

Wir werden zeigen, daß die Kreisbögen und die Kugelflächen die Lösung von zwei Maximum-Minimum-Problemen liefern. In § 1 werden wir einen Hilfssatz von H. BRUNN [1]) in verschärfter Form, sowie sein Analogon im Raum beweisen. In § 2 behandeln wir die beiden Extremaleigenschaften der Kreisbögen und der Kugelflächen.

§ 1. Der Hilfssatz von H. Brunn.

Ein *Mond M* bedeutet im folgenden eine geschlossene Kurve, die aus zwei Konvexbögen besteht, deren Tangenten stetig sind und die auf dieselbe Seite der Verbindungsgeraden ihrer gemeinsamen Endpunkte A_1, A_2 fallen und außer ihren Endpunkten keine gemeinsame Punkte besitzen. Die Krümmung $\varkappa(s)$ der Konvexbögen soll stückweise stetig sein (der Parameter s bedeutet die Bogenlänge); in einem Punkt P, wo $\varkappa(s)$ nicht stetig ist, sollen $\varkappa(s-0)$ und $\varkappa(s+0)$ existieren.

Einer der Konvexbögen des Mondes liegt im konvexen Bereich, der vom anderen Bogen und von der Strecke $\overline{A_1A_2}$ begrenzt wird: dieser heißt der *innere* Bogen, der andere der *äußere* Bogen des Mondes. Der Mond M ist *einfach*, wenn die Totalkrümmung seines äußeren Bogens $\leqq \pi$ ist. Offenbar ist dann die Totalkrümmung seines inneren Bogens auch $\leqq \pi$.

Lemma 1. *Die Maximalkrümmung des äußeren Bogens eines einfachen Mondes ist größer als die Minimalkrümmung seines inneres Bogens.*[2])

---

[1]) H. BRUNN, Über Ovale und Eiflächen, *Inauguraldissertation München* 1887, S. 7; GYULA (JULIUS) SZ.-NAGY, Ein Beweis des Vierscheitelsatzes, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **52** (1943), 198—200.

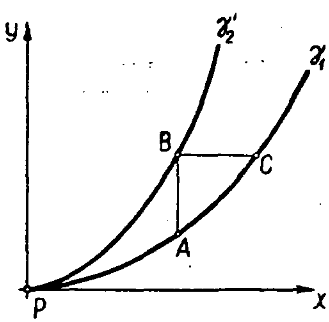
[2]) In den zitierten Arbeiten von H. BRUNN und GY. SZ.-NAGY ist nur bewiesen, daß die Maximalkrümmung des äußeren Bogens nicht kleiner ist, als die Minimalkrümmung des inneren Bogens.

B e w e i s: Ist γ_2 der äußere und γ_1 der innere Bogen des einfachen Mondes M, so ist es möglich, durch die Ecken A_1 und A_2 zwei parallele Geraden g_1 und g_2 so zu legen, daß sie die beiden Bogen nur in den Ecken treffen. Verschiebt man γ_2 in der Richtung dieser parallelen Geraden so, daß γ_2 über γ_1 passiert, so geht γ_2 schließlich in einen Bogen γ_2' über, der ganz auf der konkaven Seite von γ_1 liegt, mit γ_1 aber mindestens einen Punkt gemeinsam hat. Die gemeinsamen Punkte von γ_1 und γ_2' bilden eine geschlossene Menge U (die möglicherweise aus einem einzigen Punkte besteht). Es sei P ein Punkt am Rande von U. In P trennen sich γ_1 und γ_2'. In dem Punkte P berühren sich diese Bögen, weil die Ecken von M offenbar keine gemeinsamen Punkte von γ_1 und γ_2' sein können. Wir wählen nun P als Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen x-Achse eine gemeinsame Halbtangente von γ_1, γ_2' bildet und so gerichtet ist, daß γ_1 und γ_2' in der ersten Viertelebene (wo also die Koordinaten der Punkte nicht negativ sind) in der Umgebung vom P keinen gemeinsamen Punkt (außer P) besitzen. Die y-Achse soll nach der konkaven Seite von γ_1 und γ_2' zeigen (vgl. Figur 1). Die Bögen γ_1 und γ_2' kann man durch die Gleichungen:

(1a) $$x_i = \int_0^s \left(\cos \int_0^s \varkappa_i(s)\, ds\right) ds$$

(1b) $$y_i = \int_0^s \left(\sin \int_0^s \varkappa_i(s)\, ds\right) ds$$

angeben[3]), wo sich der Index $i = 1$ auf γ_1 und der Index $i = 2$ auf γ_2' bezieht, und wo $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die entsprechenden Krümmungen und s die von P gerechnete Bogenlänge bedeuten.



Figur 1.

Wir tragen auf γ_2' und γ_1 vom Punkte P aus Bögen von der gleichen Länge s auf und wir behaupten, daß

(2) $$y_2(s) > y_1(s).$$

[3]) Vgl. etwa DUSCHEK—MAYER, *Lehrbuch der Differentialgeometrie* I. (Leipzig und Berlin, 1930), S. 52.

Es sei B der Punkt auf γ_2' mit $\widehat{PB} = s$ (vgl. Figur 1) und projizieren wir B senkrecht bzw. parallel zur x-Achse auf γ_1. So bekommen wir die Punkte A bzw. C, für die die Ungleichungen

$$\widehat{PB} < \widehat{PA} + \overline{AB}, \quad \overline{AB} < \widehat{AC} \tag{3}$$

bestehen. Die erste Ungleichung folgt sofort daraus, daß der konvexe Bogen $\widehat{PB}$ im Inneren des Konvexbereiches liegt, der von $\widehat{PA}, \overline{AB}$ und $\overline{BP}$ begrenzt wird. Aus (3) folgt nun $\widehat{PB} < \widehat{PC}$, und das beweist die Ungleichung (2).

Es sei nun $\delta > 0$ so klein gewählt, daß

$$\int_0^\delta x_i(s)\,ds < \frac{\pi}{2} \qquad (i = 1, 2) \tag{4}$$

besteht, und daß $x_i(s)$ im Intervall $0 < s < \delta$ stetig ist. Wäre in diesem Intervall

$$x_2(s) \leqq x_1(s), \tag{5}$$

so bestände nach (1b) und (4)

$$y_2(s) - y_1(s) = \int_0^s \left(\sin \int_0^s x_2 ds - \sin \int_0^s x_1 ds\right) ds \leqq 0$$

im Widerspruch zur Ungleichung (2). Es gibt also Werte von s, für die $x_2(s) > x_1(s)$, und das beweist die Richtigkeit von Lemma 1.

Wir wollen jetzt das Analogon des Lemmas von H. Brunn im Raum formulieren. Unter einem *räumlichen Mond* M_r verstehen wir eine geschlossene konkave Fläche, die aus zwei konvexen Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ mit stetigem Gauß'schen Krümmungsmaß besteht und die außer ihrer Schnittlinie — die eine sich nicht schneidende geschlossene Raumkurve ist — keinen weiteren gemeinsamen Punkt haben. Wenn eine der sphärischen Bilder von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ das andere enthält, dann wird diejenige Fläche, deren sphärisches Bild das größere ist, *äußere Fläche* des Mondes genannt; die andere ist die *innere Fläche*. Sind die sphärischen Bilder gleich, so ist die äußere Fläche diejenige, die an der konvexen Seite der anderen liegt. Der räumliche Mond ist *einfach*, wenn das sphärische Bild der äußeren Fläche auf einer Halbkugel liegt.

Das Analogon des Hilfssatzes von H. Brunn für die räumlichen Monde ist das folgende:

Lemma 2. *Das Maximum des Gauß'schen Krümmungsmaßes bzw. das Maximum der mittleren Krümmung der äußeren Fläche eines einfachen räumlichen Mondes M_r ist nicht kleiner als das Minimum des Gauß'schen Krümmungsmaßes, bzw. das Minimum der mittleren Krümmung der inneren Fläche.*

Beweis. Bezeichne $\mathfrak{F}_1$ bzw, $\mathfrak{F}_2$ die äußere, bzw. innere Fläche von M_r, weiter bezeichne S die Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$. Da M_r einfach ist, kann man durch die Punkte von S parallele Geraden legen, die $\mathfrak{F}_2$ nur in den

Punkten der Schnittlinie S treffen. Es entsteht somit eine Zylinderfläche, die M_r in ihrem Inneren enthält. Wenn man die äußere Fläche $\mathfrak{F}_2$ von M_r parallel mit den Erzeugenden der Zilinderfläche auf die Weise bewegt, daß $\mathfrak{F}_2$ über $\mathfrak{F}_1$ passiert, so erreicht $\mathfrak{F}_2$ schließlich eine Stellung $\bar{\mathfrak{F}}_2$, in der $\bar{\mathfrak{F}}_2$ die Fläche $\mathfrak{F}_1$ an der konkaven Seite berührt. Offenbar ist ein Berührungspunkt P, den wir nach der Bewegung erhalten haben, immer ein innerer Punkt des Mondes ($P \notin S$).

Die Tangentenebene der Fläche $\bar{\mathfrak{F}}_2$ im Punkt P ist hiernach mit der von $\mathfrak{F}_1$ identisch. Wenn N eine gemeinsame Normalebene von $\mathfrak{F}_1$ und $\bar{\mathfrak{F}}_2$ im gemeinsamen Berührungspunkt P ist, dann folgt wegen der innerlichen Berührung, daß die Krümmung des in N liegenden Normalschnittes von $\bar{\mathfrak{F}}_2$ nicht kleiner, als die des in N liegenden Normalschnittes von $\mathfrak{F}_1$ ist. Bedeutet also $\varkappa_1$ die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes von $\mathfrak{F}_1$ im Berührungspunkt P, $\varkappa_2$ die von $\bar{\mathfrak{F}}_2$ in P, und liegen die beiden Normalschnitte in einer gemeinsamen Ebene, so ist

$$\varkappa_2 \geqq \varkappa_1. \tag{6}$$

Bezeichnen K_i' und K_i'' die Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}_i$ $(i=1,2)$, so kann man $\varkappa_i$ nach der Formel von Euler in der Form

$$\varkappa_i = K_i' \cos^2 \varphi_i + K_i'' \sin^2 \varphi_i \qquad (i=1,2) \tag{7}$$

darstellen, wo φ_i den Winkel des Normalschnittes mit der ersten Hauptrichtung von $\mathfrak{F}_i$ im Punkt P bedeutet. Bestimmt die zu N senkrechte Normalebene $\bar{N}$ die Normalschnitte mit den Krümmungen $\bar{\varkappa}_i$ $(i=1,2)$, so folgt aus der Gleichung (7) $\left(\text{wegen } \bar{\varphi} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$, daß

$$\frac{1}{2}(\varkappa_i + \bar{\varkappa}_i) = H_i \qquad (i=1,2)$$

ist, wo $H_i = \frac{1}{2}(K_i' + K_i'')$ die mittlere Krümmung von $\mathfrak{F}_i$ bedeutet. Da neben (6) auch

$$\bar{\varkappa}_2 \geqq \bar{\varkappa}_1 \tag{8}$$

gültig ist, so folgt nach (6) und (8), daß $H_2 \geqq H_1$ im Punkte P besteht, wonach die zweite Hälfte von unserem Lemma 2 bewiesen ist.

Um auch dessen erste Hälfte beweisen zu können, berechnen wir $\varkappa_i \bar{\varkappa}_i$. Da neben (7) auch

$$\bar{\varkappa}_i = K_i' \sin^2 \varphi_i + K_i'' \cos^2 \varphi_i \qquad (i=1,2)$$

gilt, so ist wegen $\cos^4 \varphi_i = (1 - \sin^2 \varphi_i)^2$:

$$\varkappa_i \bar{\varkappa}_i = K_i' K_i'' + \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_i)^2 (K_i' - K_i'')^2 \qquad (i=1,2).$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $\varkappa_i \bar{\varkappa}_i \geqq K_i' K_i''$ ist. Nach (6) und (8) besteht dann die Ungleichung

$$\varkappa_2\bar{\varkappa}_2 \geqq \varkappa_1\bar{\varkappa}_1 \geqq K_1'K_1'', \tag{9}$$

wenn wir für die Richtungen der betrachteten Normalebenen gerade die Hauptrichtungen von $\mathfrak{F}_2$ im Punkte P wählen.

Betrachten wir jetzt die Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}_2$ im Punkt P, so bekommen wir aus (9)

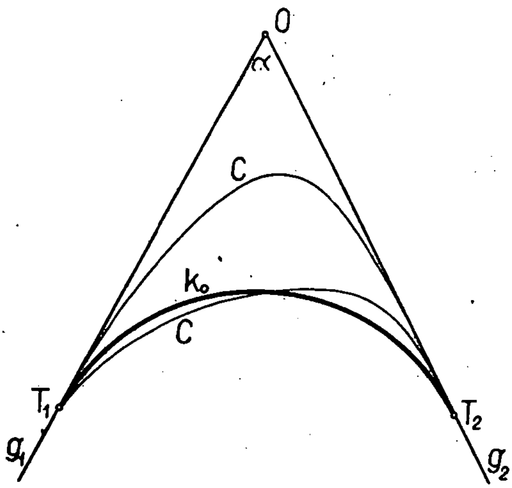
$$K_2'K_2'' \geqq K_1'K_1''$$

und das beweist den zweiten Teil von Lemma 2.

Vermutlich kann auch im Lemma 2 das Zeichen „$\geqq$" durch „$>$" ersetzt werden, doch sollte dazu eine viel feinere Überlegung benutzt werden.

§ 2. Die Extremaleigenschaften der Kreise und der Kugel.

1. Es sei α $(0 < \alpha < \pi)$ ein Winkel mit dem Scheitel O. Auf jedem Schenkel von α sei je ein Punkt T_1, T_2 gegeben, so daß $\overline{OT_1} = \overline{OT_2}$. Wir bezeichnen die von T_1 bzw. T_2 ausgehenden Halbgeraden der Schenkel von α mit g_1 bzw. g_2.



Figur 2.

Einen Bogen C werden wir *zulässig* nennen, wenn er die Endpunkte T_1, T_2 und in diesen die Halbtangenten g_1, g_2 hat, und wenn seine Tangente stetig ist. Für die Krümmung von C sollen dieselben Bedingungen erfüllt werden, wie bei den Monden, außerdem soll C im Dreieck OT_1T_2 liegen.

Wir betrachten folgende Probleme: *Es soll derjenige unter den zulässigen Bögen C bestimmt werden, dessen maximale Krümmung am kleinsten ausfällt, und auch derjenige, dessen minimale Krümmung am größten ausfällt.*

Sei k_0 der Kreisbogen, mit der Krümmung $\varkappa_0$, der die Schenkel von α in den Punkten T_1, T_2 berührt und sonst im Innern des Dreiecks OT_1T_2 liegt (vgl. Figur 2). Es besteht der

Satz 1. *Bedeutet $\varkappa(s)$ die Krümmung eines zulässigen Bogens C ($C \neq k_0$), so besteht die Ungleichung*

$$\max_s \varkappa(s) > \varkappa_0 > \min_s \varkappa(s), \tag{10}$$

also ist k_0 die einzige Lösung beider Extremalprobleme.

Beweis: Durchschneidet C den Kreis k_0, so entsteht mindestens ein einfacher Mond, wo C der äußere Bogen, und ein einfacher Mond, wo C der innere Bogen ist. Dann folgt Satz 1 aus Lemma 1.

Schneidet aber C den Kreis k_0 nicht, so bilden C und k_0 einen einfachen Mond, dessen Bogen einander in T_1 berühren. Wenn C der äußere Bogen ist, so folgt die erste Ungleichung von (10) wieder aus Lemma 1, während die zweite Ungleichung von (10) aus der Tatsache folgt, daß sich C vom Kreis k_0 in einem Punkt P^* (möglicherweise in T_1) trennen muß. In der Umgebung von P^* gibt es dann Punkte von C, wo die Krümmung von C kleiner ist als diejenige von k_0. Ist endlich C der innere Bogen, so folgt (10) wieder nach Lemma 1 bzw. aus der Berührung in einem Punkte Q^*, wo C und k_0 sich trennen.

Damit haben wir den Satz 1 vollständig bewiesen.

2. Das Analogon des Problems im dreidimensionalen Raum kann leicht formuliert und auf Grund des Lemmas 2 gelöst werden.

Es soll $\mathfrak{G}_k$ einen geraden Kreiskegel bedeuten, auf dessen Erzeugenden wir vom Spitzpunkt des Kegels aus gleich lange Strecken auftragen. Die Endpunkte bilden einen Kreis, den wir mit k_0 bezeichnen wollen. Wir bezeichnen nun als *zulässige* Eiflächen diejenigen *offenen Eiflächen* (die also einen Teil einer geschlossenen Eifläche bilden), die den Kegel $\mathfrak{G}_k$ längs k_0 berühren (d. h. die Erzeugenden von $\mathfrak{G}_k$ sind Tanganten der zulässigen Eiflächen), und deren Gesamtkrümmung $< 2\pi$ ist. Offenbar sind diese offenen Eiflächen einfach.

Es soll diejenige unter den zulässigen Eiflächen $\mathfrak{F}$ bestimmt werden, deren maximale (minimale) Gauß'sche bzw. mittlere Krümmung am kleinsten (größten) ausfällt.

Es soll nun $\mathfrak{K}_0$ die den Kegel $\mathfrak{G}_k$ längs k_0 berührende Kugelfläche bezeichnen, deren Gesamtkrümmung $< 2\pi$ ist. Bedeutet r den Radius der Kugelfläche $\mathfrak{K}_0$, so besteht der

Satz 2. *Ist K bzw. H die Gauß'sche bzw. mittlere Krümmung einer zulässigen Eifläche $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \neq \mathfrak{K}_0$), so ist:*

$$\max K \geqq \frac{1}{r^2} \geqq \min K, \tag{11a}$$

$$\max H \geqq \frac{1}{r} \geqq \min H. \tag{11b}$$

Für die Kugelfläche $\mathfrak{K}_0$ (möglicherweise auch für andere Flächen) erreicht also die Maximal- bzw. Minimalkrümmung der zulässigen Eiflächen den kleinsten bzw. größten Wert.

Beweis des Satzes 2. Nach Lemma 2 folgt dieser Satz unmittelbar, da eine beliebige zulässige Fläche $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{K}_0$ zusammen einen einfachen räumlichen Mond bildet, deren Flächen einander längs k_0 berühren. Wir können jetzt weiter in analoger Weise verfahren, wie beim Beweis des Satzes 1.

(Eingegangen am 1. Dezember 1953.)

Bibliographie.

K. Chandrasekharan and S. Minakshisundaram, Typical means (Tata Institute of Fundamental Research, Monographs on Mathematics and Physics), X + 139 pages, Oxford University Press, 1952.

The classical paper of M. Riesz in which he introduced the typical means in full generality was written im 1909. These means stand in the focus of summation theory ever since 1900, when Fejér recognised their importance in an important, perhaps the most important special case. After the Cambridge Tract of Hardy and M. Riesz in 1915 and the Mémorial-tract of E. Kogbetliantz in 1931 a necessity of a new survey of their theory and applications was to be felt. This necessity could not be covered by Hardy's *Divergent series* in 1949 owing to its plan which was at the same time too broad and too narrow for this aim. This necessity was enhanced by recent papers of Bochner and the authors on the Riesz-summation of multiple Fourier-series.

Thanks are due to the authors of the present book for having written an excellent account of the present state of theory and applications, in less than 150 pages.

In the first chapter we find the definitions of the (λ, k)-Riesz-summability and $|\lambda, k|$-Riesz-summability and the first consistency theorem according to which the "power" of the summability increases with k at a fixed λ_ν-sequence. This chapter deals with theorems containing restrictions on the Riesz sums

$$A_\lambda^k(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqq x} (x-\lambda_\nu)^k a_\nu$$

and giving stronger limitations for the sums $A_\lambda^r(x)$ with $0 \leqq r < k$. Then a convexity theorem of M. Riesz is proved giving way to an estimation of $|A_\lambda^r(x)|$ $(0 < r < k)$ from restrictions upon $|A_\lambda^0(x)|$ and $|A_\lambda^k(x)|$. There follow further Tauberian theorems in the form that from a two-sided restriction upon $A_\lambda^k(x)$ and a two- resp. one-sided restriction upon

$$A_\lambda^0(x) - A_\lambda^0(x \pm t) \qquad (0 \leqq t \leqq t_0(x))$$

imply two-sided conclusions for $A_\lambda^0(x)$, and the corresponding summability-theorems. The second chapter deals with the second consistency-theorem which asserts in various forms the fact that the "power" of the method (λ, k) increases by fixed $k > 0$ and "decreased" λ_ν-sequence; the analogous results are also treated concerning absolute summability. In the third chapter the applications to the Dirichlet-series are treated, a subject where the necessity of these means emerged. First it is shown that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{1}$$

is, with a $k \geqq 0$, (λ, k)-summable in a half-plane $\sigma > \sigma_k$ (σ_k is determined in the case $\sigma_k > 0$ explicitly), the sum $f(s)$ represents an analytic function for $\sigma > \sigma_k$ and the O-estimation for $f(s)$ in $\sigma > \sigma_k$ is deduced. It might be remarked that the typical means can also be used to obtain Ω-estimations for $f(s)$, e. g. on this way one can obtain an almost complete Ω-theory of the zeta-function of Riemann as the reviewer has shown in 1952 in the Jubilee-volume dedicated to M. Riesz. It would have been of some interest to show that if the sum of the series (1) is bounded for $\sigma > 0$, e. g. $|f(s)| \leqq 1$, then *all* the $(\lambda, 1)$-means are here absolutely $\leqq 1$. After the problems of the uniform resp. absolute summability and a discussion of the properties of the numbers σ_k the finer theorems of M. Riesz on the (λ, k)-summability on the line $\sigma = \sigma_k$ and theorems connecting the σ_k-abscissas with various properties of the function are proved; here perhaps the applications to the divisor-problems could have been mentioned. Next follow by an adaptation of Karamata's method the Tauberian theorems of Hardy and Littlewood for power-series; the chapter ends with a discussion of the important questions of Dirichlet multiplication of series. Throughout this chapter a parallel discussion is given to the other typical mean which corresponds to the series $\sum a_n l_n^{-s}$ the (l, k)-mean

$$\sum_{l_n \leqq x} \frac{a_n}{l_n^s} (x - l_n)^k.$$

The fourth chapter considers the Riesz-summability (n, δ) of suitably arranged Fourier-series of periodic functions of k variables. The main result is that the series is (n, δ)-summable e. g. in every continuity-point of the function if $\delta > \frac{k-1}{2}$, and similar results hold for the summability of the derived series. These means give a new approach to treat the classical identities for the number of lattice-points in the k-dimensional sphere. The book ends with the discussion of necessary and sufficient conditions of the (n, δ)-summability analogous to the theory of Hardy and Littlewood concerning Cesàro summability.

The book is rather concise but clear and easily readable; a slight slip of notation can only be found on p. 76. At the end of the chapters there are interesting historical and bibliographical notes. Here is the immense literature of the theory and applications of the $(n, 1)$-summation deliberately omitted (though a systematic survey of the applications would be of independent interest). It might have been noted that the $(\log n, 1)$ means occured at the first time in the proofs of Hadamard and de la Vallée Poussin for the prime-number theorem. A further historical remark refers to the notes of the Chapter II; the sign of the Riesz-means of the Fourier-series of positive functions were previously discussed by O. Szász. The historical notes show how much Indian mathematicians contributed to this important theory. The book constitutes a serious gain of the mathematical literature and we look forward with great expectation to the subsequent monographs of the series whose first volume the present book is.

P. Turán.

Maurice Fréchet, Pages choisies d'analyse générale (Collection de logique mathématique, série A, III), 213 pages, Paris, Gauthier—Villars, 1953.

On sait quel rôle de pionnier a joué M. Fréchet dans l'analyse fonctionnelle et dans l'analyse „générale" des variables abstraits. Il a réuni dans ce volume ses articles les plus intéressants dans ce domaine. Pour alléger le texte, il a omis certaines démonstrations figurant dans les mémoires originaux, mais celles-ci sont toujours signalées par des références. La plupart des idées et des résultats qui étaient publiés dans ces mémoires ont suggéré de nombreuses et importantes recherches ultérieures et devenaient ainsi le point de départ de théories élaborées. Dans des „remarques complémentaires", l'auteur signale quelquesuns des travaux qui prolongeaient directement les siens. — Chapitres: I. Vue d'ensemble. — II. Espaces fontionnels. — III. Analyse fonctionnelle. — IV. Les espaces abstraits. — V. L'Analyse générale.

B. Sz.-N.

Sam Perlis, Theory of matrices, IX + 234 pages, Cambridge (Mass.), Addison—Wesley Press, 1952.

Der erste Kapitel des Buches enthält elementare Sätze über die Addition und Multiplikation von Matrizen und Hypermatrizen. In der Absicht, den Determinantenbegriff möglichst spät einzuführen, behandelt Verfasser die Begriffe Dimension, Rang, lineare Dependenz zuerst determinantenfrei. Die inverse Matrix wird mit Hilfe der Minimalgleichung eingeführt. Erst im Kapitel IV werden die elementarsten Sätze der Determinantentheorie bewiesen. Kapitel V bringt die Grundbegriffe über die Kongruenz der Matrizen. Kapitel VII enthält die Diskussion von Matrizen mit polynomialen Elementen, dem ein elementarer Kapitel (VI) über Skalarpolynome vorausgeschickt ist. Im Kapitel VIII wird die Ähnlichkeit und die Transformation auf rationale Normalform erörtert. Kapitel IX enthält spezielle Ausführungen über orthogonale, unitäre und normale Matrizen. Kapitel X ist den linearen Transformationen gewidmet.

Im verhältnismäßig kleinem Buche ist viel Stoff zusammengedrängt, demzufolge ist manches nur flüchtig skizziert. Auffallend sind einige allzuelementare Einzelheiten (Kapitel I, 1—11; der ganze Kapitel VI), welche wohl durch lokale Bedürfnisse bedingt sind.

Daß in dem ganzen Buche eine abstrakte Behandlung des Stoffes bevorzugt wird, ist an und für sich berechtigt. Wenn aber Verfasser in der Einleitung behauptet, daß er sein Buch auch für Physiker und Ingenieure geschrieben hat, so ist diesbezüglich Folgendes festzustellen. Für einen Leser, der um die Anwendungen willen Matrizentheorie lernt, ist ein Satz, wie „es gibt eine Zahl, eine Matrix, etc." nutzlos und leer, wenn kein expliziter Algorithmus für die effektive Berechnung angegeben wird. Diese Tatsache scheint Verfasser vollkommen außer Acht gelassen zu haben. So z. B. gibt Verfasser auf S. 175 für die idempotenten Komponenten einer Matrix nur die abstrakte Definition, während er zwei Seiten später sich gezwungen sieht, die explizite interpolatorische Darstellung der Komponenten einzuschmuggeln.

Abgesehen von ähnlichen, vom praktischen Standpunkte aus nicht günstigen Einzelheiten, das hübsch ausgestattete Buch wird als Einführung in die Grundbegriffe der Matrizentheorie gute Dienste leisten.

E. Egerváry.

L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXV), X + 197 Seiten, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1953.

Die Untersuchungen der Struktur und Eigenschaften der Kristalle hat bekanntlich zahlreiche Gelehrte zu wertvollen mathematischen Forschungen angeregt. Die regulären Anordnungen von Punkten oder Figuren, mit welchen sich u. a. Platon, Archimedes, Kepler, Bravais, Schläfli beschäftigt haben, haben am Ende des XIX. Jahrhunderts zu der berühmten Entdeckung der 230 Kristallklassen durch Fedorow (1885), Schoenflies (1891) und Barlow (1894) geführt. Im Laufe weiterer Untersuchungen wurde die Aufmerksamkeit auf gewisse Extremalprobleme gelenkt, weil man gedacht hat, die verschiedenen physikalischen und chemischen Eigenschaften der Kristalle dadurch erklären zu können. Minkowski hat zahlentheoretische Fragen auf geometrischem Wege untersucht, was der Untersuchung extremaler Lagerungen neuen Impuls gegeben hat. Während bei physikalisch-chemischen und zahlengeometrischen Extremalproblemen von vornherein nur solche Anordnungen vorkommen, die gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen, werden im Buche des Verfassers auch irreguläre Anordnungen betrachtet, wobei als extremale Anordnungen sich oft die regulären ergeben. Ein derartiges Problem hat A. Thue in einer Jugendarbeit (1892) gelöst. Nach einer langen Pause kam in den letzten 10—12 Jahren ein großer Aufschwung in der Untersuchung derartiger Extremalprobleme.

Es ist zu begrüßen, daß zur Darstellung dieser Resultate sich der Verfasser entschlossen hat, der auf diesem Gebiete zahlreiche Ergebnisse erreicht hat. Sein schön ausgestattetes und reichhaltiges Buch ist für einen breiten Leserkreis bestimmt. Diejenigen Leser, die keine höhere mathematische Bildung haben, werden es gerne sehen, daß zum Verständnis der aufgeworfenen anschaulichen Problemen überhaupt keine mathematische Vorkenntnisse nötig sind; die jüngeren Mathematiker werden erfreut sein, sich mit einem Gebiet bekannt machen zu können, auf welchem noch viel zu schaffen ist; während die Fachleute manche elegante Lösungen und die gegebene Perspektive schätzen werden. Die einzelnen Abschnitte werden mit wertvollen geschichtlichen Bemerkungen versehen.

Der Abschnitt I hat einen einführenden Charakter. Es werden hauptsächlich die nötigen elementargeometrischen Hilfsmitteln zusammengestellt. Es ist hier die schöne Behandlung des isoperimetrischen Problems hervorzuheben. Der erste Teil des Abschnittes II (Sätze aus der Theorie der konvexen Körper) hat ebenfalls einen vorbereitenden Charakter. Nachher folgen die Sätze von Dowker über das maximale bzw. minimale eingeschriebene, bzw. umschriebene Polygon eines konvexen Gebietes. Der Abschnitt wird mit einigen Sätzen der Integralgeometrie abgeschlossen. Der Abschnitt III behandelt Lagerungs- und Überdeckungsprobleme von konvexen Scheiben (kongruente, inkongruente Kreise, beliebige konvexe Scheiben) in der Ebene. Es ist besonders zu betonen, daß als extremale Lage in vielen Fällen die gitterförmige Anordnung sich ergibt. Der Abschnitt IV enthält Vorbereitungen zur Behandlung der folgenden schwierigen noch nicht vollständig gelösten Probleme: Welche sind jene konvexen Gebiete, mit welchen sich die Ebene am schlechtesten bzw. am unwirtschaftlichsten überdecken läßt? Die Lösung wird in dem Falle gegeben, daß die Anordnung gitterförmig angenommen ist, bzw. daß das Gebiet zentralsymmetrich ist. Im Abschnitt V werden die Extremaleigenschaften der regulären Polyeder behandelt. Wir erfahren, daß beim Problem der dichtesten Kreislagerung und der dünnsten Kreisüberdeckung auf der Kugelfläche, die regulären Dreiecks- und Dreikantpolyeder eine ausgezeichnete Rolle spielen. Durch gleichzeitige Angabe der Ecken- und Flächenanzahl ergibt sich ein Extremalproblem, wo sich eben die fünf regulären Polyeder als extremal erweisen. Die letzten zwei Paragraphen behandeln Lagerungen auf einer beliebigen konvexen Fläche. Der Abschnitt VI behandelt irreguläre Lagerungen auf der Kugel. Die dichteste sphärische Lagerung von n kongruenten Kreisen ist im Allgemeinen noch unbekannt. Wir lernen die diesbezügliche Methode von Schütte und van der Waerden und deren Anwendung im Falle $n=7$, $n=8$ kennen. Der Abschnitt VII gibt zuerst eine allgemeine Orientierung über die räumlichen Lagerungsprobleme. Es wird dann versucht, auf die Frage Antwort zu geben, wodurch die Schwierigkeiten bei der Behandlung der dichtesten Kugellagerung verursacht werden, und wie diese Schwierigkeiten überwunden werden könnten. Es folgt weiter die Lösung eines damit zusammenhängenden, die Raumzerlegungen betreffenden Extremalproblems. Das Buch wird mit einem sorgfältig zusammengestellten Literaturverzeichnis und mit gutem Namen- und Sachverzeichnis versehen.

Wir glauben, daß das Buch wohl zur Erfüllung des durch den Verfasser im Vorworte ausgesprochenen Wunsches beitragen wird, daß nämlich dieses anziehende Gebiet der Geometrie weitere Forscher gewinnen wird.

J. Molnár.

Jean-Louis Destouches, Méthodologie — Notions géométriques (Traité de physique théorique et de physique mathématique, ouvrages réunis par Jean-Louis Destouches, tome I), XIV + 228 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

Dans la série d'ouvrages réunis par lui, et dus à des collaborateurs éminents, M. Destouches s'est fixé pour but de présenter un traité qui, ayant en vue le programme d'examen de physique théorique aux universités françaises, contiendrait l'essentiel des théories physiques et des méthodes qu'elles utilisent.

Dans le présent fascicule, l'auteur entend poser les fondements, d'une part, de l'épistémologie, d'autre part, de la géométrie générale. Pour la première, il circonscrit en détail la tâche de la physique théorique et les devoirs qui incombent à une physique théorique bien comprise.

Il est moins aisé de se rendre compte des objectifs de la partie qui traite de la géométrie. L'auteur, après avoir insisté sur l'importance de la formation des concepts en géométrie, définit abstraitement et de façon peu justifiée, à partir de considérations sur la théorie des ensembles, l'espace et les autres éléments de base de la géométrie. De l'algèbre abstraite, l'auteur passe à la géometrie affine, puis, cas particulier de celle-ci, à la géométrie euclidienne. Cette mise en oeuvre de la matière semble inacceptable du point de vue de l'ensemble du traité, car elle ne présente pas les notions de géométrie indispensables à l'étude de la physique théorique, sans parler des résultats récemment acquis en géométrie différentielle supérieure, aussi nécessaires que les précédentes. En leur place, l'auteur développe une axiomatique des champs de vecteurs utilisés en cinématique et en dynamique des systèmes de points, et cela avec un luxe de détails dont nous ne connaissons guère d'exemple .

J. I. Horváth (Szeged).

Louis de Broglie, La physique quantique restera-t-elle indéterministe ? VII + 113 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

Jusqu'à ces dernières années, la conception admise pour interpréter les résultats de la mécanique quantique était celle de Born, de Bohr et d'Heisenberg. D'après eux, l'électron et les autres corpuscules présentent une réalité objective, la fonction d'onde par contre n'est douée d'aucune signification physique immédiate: grâce à elle on peut tout au plus calculer la probabilité que le corpuscule envisagé se trouve en un lieu donné. En 1927 M. L. de Broglie avait élaboré la théorie de la "double solution", à savoir de "l'onde-pilote"; selon cette théorie, "toute solution continue ψ de la mécanique ondulatoire était en quelque sorte doublée par une solution à singularité u comportant une singularité en général mobile et ayant la même phase que la solution ψ". L'onde ψ ne jouissait donc d'aucune réalité physique; le corpuscule était représenté par la singularité de l'onde u, qui n'était autre que le centre d'un champs ondulatoire étendu. Le corpuscule-singularité progressait en suivant le gradient de la phase, les trajectiores possibles du corpuscule coïncidaient avec les courbes orthogonales aux surfaces d'égale phase de ψ.

Des discussions récentes, qui touchent aux fondements de la mécanique quantique, viennent de replacer cette théorie au premier plan de l'actualité; ces discussions ont incité l'auteur à republier deux séries de ses articles et de ses mémoires, non sans les annoter ni les commenter. La première s'étend de 1924 à 1926, la seconde sur 1951 et 1952, celle-ci complétée par deux notes de M. Vigier.

L'attention du lecteur est éveillée dès le début par un "exposé général" où l'auteur décrit la genèse de ses travaux scientifiques et les problèmes qui se sont posés à lui au sujet des fondements de la physique quantique et du développement de ses conceptions.

Le dernier chapitre du livre est constitué par un article de M. Jean-Pierre Vigier: Physique relativiste et physique quantique. Il discute des problèmes actuels épistémologiques.

J. I. Horváth (Szeged).

Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper.

Von BÉLA SZ.-NAGY in Szeged.

Dem Andenken meines Vaters Gyula Sz.-Nagy gewidmet.

1. Einleitung.

Die Untersuchung, über die hier berichtet wird, wurde durch einen Aufsatz von L. NACHBIN[1]) angeregt, der eine Verallgemeinerung des Hahn—Banachschen Satzes über die Fortsetzung linearer Operationen betrachtet. Der Hahn—Banachsche Satz behauptet bekanntlich folgendes: Ist $f(x)$ eine im Unterraum F des Banachschen Raumes E[1a]) definierte (reellwertige) lineare Operation mit der Norm

$$\|f\|_F = \sup_{x \in F} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

so läßt sich $f(x)$ zu einer in ganz E definierten linearen Operation $g(x)$ fortsetzen derart, daß die Norm debei nicht vergrößert wird:

$$\|g\|_E = \|f\|_F.$$

Das Problem von NACHBIN ist, diesen Satz auf lineare Operationen auszudehnen, deren Wertbereich nicht die reellen Zahlen, sondern ein beliebig gegebener Banachscher Raum B ist. Er beweist den folgenden Satz. Damit der Hahn—Banachsche Satz für alle linearen Operationen gilt, deren Definitionsbereich in einem beliebigen Banachschen Raume E und deren Wertbereich im festen Banachschen Raume B liegen, ist notwendig und hinreichend, daß B die folgende Eigenschaft besitzt: Wenn in einem System von Kugeln in B jedes Paar von Kugeln gemeinsame Punkte besitzt, so haben alle Kugeln des Systems einen gemeinsamen Punkt.

Ist der Raum B endlichdimensional, so zeigt weiter NACHBIN, daß B die obige Eigenschaft dann und nur dann besitzt, wenn man in B eine solche Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ einführen kann, daß die Norm $\|x\|$ eines beliebigen Vektors

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \in B$$

---

[1]) L. NACHBIN, A theorem of Hahn—Banach type for linear transformations, *Transactions American Math. Soc.*, **68** (1950), 28—46.

[1a]) Es werden im folgenden nur *reelle* Banachsche Räume betrachtet.

in der Form

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

sich ausdrücken läßt.

Da jeder n-dimensionale Banachsche Raum B aus dem n-dimensionalen Euklidischen Raume R_n dadurch entsteht, daß man in diesem eine Minkowskische Metrik mit Hilfe eines zentralsymmetrischen konvexen Eichkörpers einführt, so kann das letzte Ergebnis rein geometrisch auch folgendermaßen formuliert werden:

Ist $\mathfrak{K}$ ein zentralsymmetrischer konvexer Körper[2]) *in R_n, der kein Parallelepipedon ist* ($n \geqq 2$)[3]), *so gibt es in R_n ein System von Körpern, die alle homothetische Bilder von $\mathfrak{K}$ sind, paarweise gemeinsame Punkte besitzen, und die alle doch keinen gemeinsamen Punkt haben. Für ein Parallelepipedon gilt das nicht mehr.*

Die letzte Behauptung ist in R_1 klar, da ja ein System von paarweise nichtfremden Intervallen bekanntlich einen gemeinsamen Punkt besitzt; für R_n ($n \geqq 2$) folgt daraus die Behauptung, indem man die Projektionen auf die Achsen eines solchen Koordinatensystems betrachtet, dessen Achsen zu den Kanten des Parallelepipeds parallel sind.

Der Beweis, den NACHBIN für den obigen Satz gibt, benutzt wesentlich die Zentralsymmetrie von $\mathfrak{K}$, und daß auch vergrößerte und verkleinerte Bilder von $\mathfrak{K}$ zugelassen sind.

Der folgende Satz, den wir auf rein geometrischem Wege beweisen werden, bietet in beiden angedeuteten Richtungen eine Verallgemeinerung des obigen: es wird keine Symmetrie vorausgesetzt, und man wird mit homothetischen Bildern einfachster Art, nämlich mit Parallelverschiebungen auskommen[4]). Außerdem wird eine obere Schranke für die Anzahl der notwendigen Parallelverschiebungen angegeben. Ob diese Schranke $n+1$ eine genaue ist, wird hier offen gelassen.

Satz. *Jeden konvexen Körper $\mathfrak{K}$ in R_n ($n \geqq 2$), der kein Parallelepipedon ist, kann man durch Parallelverschiebungen in $n+1$ oder eventuell weniger Stellungen $\mathfrak{K}_i$ bringen derart, daß die Körper $\mathfrak{K}_i$ sich paarweise schneiden, aber sie alle keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Für ein Parallelepipedon gilt das nicht mehr.*

---

[2]) Ein konvexer Körper ist eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe Punktmenge mit nichtleerem Inneren.

[3]) Wir benützen die für $n=3$ gebräuchlichen Benennungen, obwohl n auch gleich 2 oder größer als 3 sein kann. Für $n=1$ ist der Satz trivial, da in R_1 jeder „konvexe Körper" ein Intervall und folglich ein „eindimensionales Parallelepipedon" ist.

[4]) NACHBIN (a. a. O., S. 43, Fußnote) vermutet, sein obiger Satz gelte auch dann, wenn man die Rolle des konvexen Körpers einer beliebigen kompakten Punktmenge C in R_n übergibt und wenn man nur Parallelverschiebungen von C betrachtet. Doch gibt er dafür keinen Beweis.

Die letzte Behauptung folgt wie oben.

Herrn L. Rédei, dem ich diesen Satz noch als Vermutung mitgeteilt habe, verdanke ich den folgenden Beweisansatz[5]). Man wähle reguläre Randpunkte auf $\mathfrak{K}$ (die Definition siehe weiter unten) und man bringe diese durch Parallelverschiebungen des Körpers in eine zusammenfallende Lage O. Aus der Regularität von O als Randpunkt eines jeden der verschobenen Körper folgt, daß diese Körper sich paarweise schneiden auch dann, wenn man sie noch, etwa in der Richtung der inneren Normalen in O, je einer weiteren kleinen Parallelverschiebung unterwirft. Wenn aber die regulären Randpunkte geeignet gewählt sind, kann man erwarten, daß die Körper nach diesen kleinen Verschiebungen keinen gemeinsamen Punkt mehr besitzen.

Dieser Ansatz kann, wie es gezeigt wird, wirklich zu einem Beweis ausgebaut werden. Dazu haben wir einige Hilfssätze nötig, die wir im folgenden Paragraphen beweisen werden.

Von Herrn G. Hajós stammt die folgende äquivalente Fassung unseres Satzes:

Unter den konvexen Körpern $\mathfrak{K}$ in R_n $(n \geqq 2)$ sind es nur die Parallelepipeda, die die folgende Eigenschaft besitzen: Jeder solche (eventuell entartete) Simplex $[Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1}]$, dessen Seiten $[Q_i Q_j]$ einzeln durch geeignete Parallelverschiebungen von $\mathfrak{K}$ gedeckt werden können, kann selbst durch eine Parallelverschiebung von $\mathfrak{K}$ gedeckt werden.

Zum Beweis der Äquivalenz braucht man nur zu bemerken, daß ein System von Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ dann und nur dann durch eine Parallelverschiebung von $\mathfrak{K}$ gedeckt werden kann, wenn die Körper

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K} + \overrightarrow{Q_i O} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

einen gemeinsamen Punkt besitzen (dabei ist O ein beliebiger fester Punkt in R_n).

2. Die Hilfssätze.

Zuerst führen wir einige Bezeichnungen ein. Ist P ein Randpunkt des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, so bezeichnen wir mit $S(P)$ eine durch P gehende Stützebene an $\mathfrak{K}$, und mit $H(P)$ denjenigen durch $S(P)$ begrenzten abgeschlossenen Halbraum, welcher den Körper $\mathfrak{K}$ enthält. Endlich soll $\mathfrak{n}(P)$ denjenigen normalen Einheitvektor von $S(P)$ bedeuten, der nach dem Inneren von $H(P)$ weist.

Ein Randpunkt P von $\mathfrak{K}$ heißt *regulär*[6]), falls es in P nur eine einzige

[5]) Ihm bin ich auch für eine Besprechung des Hilfssatzes 1 verpflichtet, die mir in der endgültigen Fassung des Beweises dieses Hilfssatzes nützlich war.

[6]) Vgl. T. Bonnesen—W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934), insbesondere S. 13. Im dreidimensionalen Falle bezeichnet H. Minkowski einen solchen Punkt als „Flächenpunkt", s. *Gesammelte Abhandlungen* (Leipzig und Berlin, 1911), Bd. 2, S. 163.

Stützeben an $\mathfrak{K}$ gibt; $S(P), H(P)$ und $\mathfrak{n}(P)$ sind dann also eindeutig durch P bestimmt.

Ist O ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$, so treffen bekanntlich *fast alle* Halbstrahlen aus O den Rand von $\mathfrak{K}$ in regulären Randpunkten (d. h. die übrigen Halbstrahlen schneiden die Oberfläche der Einheitskugel um den Mittelpunkt O in einer Punktmenge vom Lebesgueschen Maß Null)[7]). Hieraus ist es leicht darauf zu schließen, daß die regulären Randpunkte auf dem Rand von $\mathfrak{K}$ *überall dicht* liegen. In der Tat, sei $\mathfrak{K}_0$ eine beliebig kleine (Voll-)Kugel um einen Randpunkt P_0 von $\mathfrak{K}$, und es sei D der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_0$ mit einer Stützebene $S(P_0)$ an $\mathfrak{K}$; ferner sei O ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$, der auch im inneren von $\mathfrak{K}_0$ liegt. Die Halbstrahlen von O aus zu den Punkten von D bilden offenbar eine Strahlenmenge positiven Maßes, folglich gibt es unter diesen Halbstrahlen gewiß einen solchen, der $\mathfrak{K}$ in einem regulären Randpunkt R trifft. Da R innerer Punkt einer solchen Strecke ist, die den Punkt O mit einem Punkte von D verbindet, so liegt R gewiß in $\mathfrak{K}_0$, und damit ist die Existenz eines regulären Randpunktes im Inneren von $\mathfrak{K}_0$ gezeigt worden.

Hilfssatz 1. *Ist Q ein Punkt außerhalb des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, so gibt es einen regulären Randpunkt R von $\mathfrak{K}$ derart, daß $S(R)$ den Punkt Q vom Inneren des Körpers $\mathfrak{K}$ trennt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{K}_0$ eine Kugel im Inneren von $\mathfrak{K}$ und mit dem Mittelpunkte P_0. Die Strecke QP_0 hat einen inneren Punkt P_1, der am Rande von $\mathfrak{K}$ liegt. Sei $\mathfrak{K}_1$ diejenige Kugel mit dem Mittelpunkt P_1, die inbezug auf den Ähnlichkeitspunkt Q zu $\mathfrak{K}_0$ homothetisch ist. In $\mathfrak{K}_1$ gibt es einen regulären Randpunkt R_1 von $\mathfrak{K}_0$; R_0 sei der zu R_1 homologe Punkt in $\mathfrak{K}_0$. R_1 ist dann ein innerer Punkt der Strecke QR_0; folglich wird der Punkt Q vom Punkte R_0 durch $S(R_1)$ getrennt. Mit R_0 liegen dann aber auch alle anderen inneren Punkte von $\mathfrak{K}$ auf der einen Seite von $S(R_1)$, und Q auf der anderen Seite, womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Auf jedem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ in $R_n\,(n \geqq 2)$ kann man endlich viele regulären Randpunkte $P_1, \ldots, P_m$ finden derart, daß*

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{m} H(P_i)$$

eine beschränkte Punktmenge und folglich ein ($\mathfrak{K}$ enthaltender) Polyeder ist. Ist $\mathfrak{K}$ kein Parallelepipedon, so kann man verlangen, daß auch Π kein Parallelepipedon ist.

Beweis. G sei eine den Körper $\mathfrak{K}$ umschließende Kugeloberfläche. Zu jedem Punkte Q von G gibt es, laut Hilfssatz 1, einen regulären Randpunkt

[7]) Siehe Bonnesen—Fenchel, a. a. O.[6]).

P von $\mathfrak{K}$ so, daß $S(P)$ den Punkt Q vom Inneren des Körpers $\mathfrak{K}$ trennt. $S(P)$ trennt dann aber auch eine Umgebung von Q vom Inneren von $\mathfrak{K}$. Die Anwendung des Heine—Borelschen Überdeckungssatzes ergibt, daß es endlich viele reguläre Randpunkte P_i $(i = 1, \ldots, m)$ von $\mathfrak{K}$ gibt derart, daß jeder Punkt von G durch mindestens ein $S(P_i)$ vom Inneren von $\mathfrak{K}$ getrennt wird. Dann ist

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{m} H(P_i)$$

im Inneren von G enthalten, folglich ein Polyeder.

Ist $\mathfrak{K}$ ein Parallelepipedon, so ist notwendigerweise $\Pi = \mathfrak{K}$. Wenn $\mathfrak{K}$ kein Parallelepipedon, aber Π ein Parallelepipedon ist, so folgt aus $\mathfrak{K} \subset \Pi$, $\mathfrak{K} \neq \Pi$, daß es einen Eckpunkt von Π gibt, der nicht in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Dann gibt es, laut Hilfssatz 1, einen regulären Randpunkt P_{m+1} von $\mathfrak{K}$ so, daß dieser Eckpunkt durch $S(P_{m+1})$ vom Inneren von $\mathfrak{K}$ getrennt wird. Dann ist

$$\Pi' = \Pi \cap H(P_{m+1}) = \bigcap_{i=1}^{m+1} H(P_i)$$

kein Parallelepipedon und hat alle im Hilfssatze geforderten Eigenschaften.

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in R_n $(n \geqq 2)$, der kein Parallelepipedon ist, so gibt est reguläre Randpunkte $P_1, \ldots, P_\nu$ von $\mathfrak{K}$ in einer Anzahl ν mit $3 \leqq \nu \leqq n+1$, so daß* a) *keine zwei der Stützebenen $S(P_i)$ parallel sind,* b) *zwischen den normalen Einheitsvektoren $\mathfrak{n}(P_i)$ eine lineare Relation*

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i \, \mathfrak{n}(P_i) = 0$$

mit positiven Koeffizienten a_i besteht.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 gibt es (verschiedene) reguläre Randpunkte $P_1, \ldots, P_m$ von $\mathfrak{K}$ derart, daß

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{m} H(P_i)$$

ein Polyeder, aber kein Parallelepipedon ist. Bedeutet t_i den Inhalt der auf $S(P_i)$ liegenden Seite von Π, so gilt bekanntlich die Relation

$$\sum_{i=1}^{m} t_i \, \mathfrak{n}(P_i) = 0. \qquad (1)$$ [8])

Zu jedem P_i kann es offenbar höchstens einen Punkt P_j $(j \neq i)$ geben so, daß $S(P_i)$ und $S(P_j)$ parallel sind; ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $t_i \geqq t_j$ angenommen werden. Man hat

$$t_i \, \mathfrak{n}(P_i) + t_j \, \mathfrak{n}(P_j) = (t_i - t_j) \, \mathfrak{n}(P_i).$$

[8]) Vgl. H. Minkowski, Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 2, insbesondere S. 104.

Im Falle $t_i = t_j$ ändert sich also die Summe in (1) nicht, wenn man das i-te und das j-te Glied streicht; und auch im Falle $t_i > t_j$ ändert sie sich nicht, wenn man das j-te Glied streicht und das i-te durch $\tau_i\,\mathfrak{n}(P_i)$ ersetzt mit $\tau_i = t_i - t_j > 0$.

Führt man diese Operation an der Summe in (1) für jedes Paar von Punkten mit parallelen Stützebenen aus, so werden endlich entweder alle Glieder gestrichen (Fall A), ober aber es bleiben noch Glieder übrig (Fall B). Fall A tritt dann auf, wenn es zu jeder Seite des Polyeders Π eine inhaltsgleiche parallele Seite gibt[9]).

Zuerst wollen wir den Fall B untersuchen. In diesem Falle hat man also, nach passender Umnumerierung der Punkte P_i, eine Relation

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_i\,\mathfrak{n}(P_i) = 0 \quad \text{mit} \quad \tau_i > 0, \tag{2}$$

wobei keine der $\mathfrak{n}(P_i)$ parallel sind; notwendigerweise ist dann $r \geqq 3$.

Ist $r \leqq n+1$, so haben wir schon die gewünschte Relation vor uns.

Ist aber $r \geqq n+2$, so machen wir von einem Verfahren Gebrauch, welches uns gestattet, die Relation (2) durch eine analoge, aber weniger Glieder enthaltende zu ersetzen.

Da $n+1$ Vektoren in R_n linear abhängig sind, hat man eine Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i\,\mathfrak{n}(P_i) = 0 \tag{3}$$

mit Koeffizienten σ_i, unter denen mindestens der eine *positiv* ist.

Nun sei λ der kleinste unter den Werten

$$\frac{\tau_i}{\sigma_i},$$

wobei nur diejenigen Indizes i beachtet werden $(1 \leqq i \leqq n+1)$, für welche $\sigma_i > 0$ ist. Aus (2) und (3) folgt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \tau_i'\,\mathfrak{n}(P_i) + \sum_{i=n+2}^{r} \tau_i\,\mathfrak{n}(P_i) = 0$$

mit $\tau_i' = \tau_i - \lambda\sigma_i\ (1 \leqq i \leqq n+1)$; man hat offenbar $\tau_i' \geqq 0$ und für mindestens ein i ist $\tau_i' = 0$. Wenn man also die Glieder mit $\tau_i' = 0$ streicht, dann erhält man wirklich eine Relation von der Art (2), aber mit weniger Gliedern. Ist die Anzahl der übriggebliebenen Glieder in der Summe schon $\leqq n+1$, so sind wir am Ziele. Jedenfalls genügt es, dieses Verfahren endlich vielmal anzuwenden, um schließlich zu einer Relation von der Art (2), aber links mit höchstens $n+1$ (und mindestens 3) Gliedern zu gelangen.

Hiermit ist der Beweis im Falle B fertig.

---

[9]) Dann ist Π zentralsymmetrisch, vgl. H. Minkowski, a. a. O. [7]), S. 118. Wir werden aber diese Tatsache nicht gebrauchen.

Im Falle A hat Π lauter paarweise parallele Seiten gleichen Flächeninhalts. Da Π kein Parallelepipedon ist, ist die Anzahl der parallelen Seitenpaare mindestens gleich $n+1$. Die Punkte P_i können dann folgendermaßen angeordnet werden:

$$P_1', P_1'', P_2', P_2'', \ldots, P_s', P_s'' \qquad (s \geqq n+1),$$

wobei Punkte mit parallelen Stützebenen mit dem gleichen Index bezeichnet sind. Man hat also

$$\mathfrak{n}(P_k') = -\mathfrak{n}(P_k'') \qquad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{4}$$

Die $n+1$ Vektoren

$$\mathfrak{n}(P_1'), \mathfrak{n}(P_2'), \ldots, \mathfrak{n}(P_{n+1}')$$

sind linear abhängig, d. h. es besteht eine Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \, \mathfrak{n}(P_k') = 0$$

mit Koeffizienten α_k, die nicht alle verschwinden. Man schreibe diese Gleichung, unter Beachtung von (4), in der folgenden Form an:

$$\sum{}' \alpha_k \, \mathfrak{n}(P_k') + \sum{}'' (-\alpha_k) \, \mathfrak{n}(P_k'') = 0,$$

wobei die Summen Σ', Σ'' auf diejenigen Indizes k zu erstrecken sind, für welche $\alpha_k > 0$, bzw. $\alpha_k < 0$ ist. Wenn man also von den Punkten

$$P_1', P_2', \ldots, P_{n+1}'$$

einen Punkt P_k' beibehält, wegläßt, oder mit P_k'' ersetzt je nachdem $\alpha_k > 0$, $\alpha_k = 0$, oder $\alpha_k < 0$ ist, so bekommt man ein System von regulären Randpunkten von $\mathfrak{K}$ mit der im Hilfssatz 3 gewünschten Eigenschaft.

Damit ist dieser Hilfssatz vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4. *$\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ seien zwei konvexe Körper in $R_n (n \geqq 2)$ mit einem gemeinsamen Randpunkte O, der in Bezug auf beide Körper regulär ist. Wir nehmen ferner an, daß die entsprechenden Stützebenen $S_1(O)$, $S_2(O)$ nicht zusammenfallen. Dann haben $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gemeinsame innere Punkte.*

Beweis. Wir bedienen uns der folgenden Tatsache, deren Beweis bei Minkowski (wenn auch in impliziter Form und nur für $n = 3$ dargestellt) zu finden ist[10]): Ist O ein regulärer Randpunkt eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, und ist h ein beliebiger, von O ausgehender und sonst im Inneren von $H(O)$ verlaufender Halbstrahl, so liegt auf h mindestens ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$.

[10]) H. Minkowski, a. a. O.[5]), § 13, beweist die folgenden Behauptungen: Ist O ein beliebiger Randpunkt des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, so ziehe man aus O alle Halbstrahlen, die durch mindestens einen inneren Punkt von $\mathfrak{K}$ gehen: die Vereinigungsmenge der Punkte aller dieser Halbstrahlen sei mit $\mathfrak{R}'$, und ihre abgeschlossene Hülle mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Dann gilt: a) Jeder innere Punkt von $\mathfrak{R}$ ist schon in $\mathfrak{R}'$ enthalten, b) im Falle eines regulären Randpunktes O fällt $\mathfrak{R}$ mit dem Halbraum $H(O)$ zusammen.

Nun seien $H_1(O)$ und $H_2(O)$ die Halbräume, die den Körpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ und dem gemeinsamen Randpunkte O entsprechen. Da $S_1(O)$ und $S_2(O)$ voraussetzungsgemäß nicht zusammenfallen, so haben diese Halbräume einen gemeinsamen inneren Punkt P. Der Halbstrahl $\overrightarrow{OP}$ enthält dann einen inneren Punkt P_1 von $\mathfrak{K}_1$ und einen inneren Punkt P_2 von $\mathfrak{K}_2$. Ist $\overline{OP_1} \leqq OP_2$ (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann), so ist P_1 ein innerer Punkt sowohl von $\mathfrak{K}_1$, wie auch von $\mathfrak{K}_2$.

3. Beweis des Satzes.

Laut Hilfssatz 3 kann man auf $\mathfrak{K}$ die regulären Randpunkte

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu \qquad (3 \leqq \nu \leqq n+1)$$

derart wählen, daß keine zwei der Stützebenen $S(P_i)$ parallel sind und eine Gleichung

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i \, \mathfrak{n}(P_i) = 0 \tag{5}$$

mit positiven Koeffizienten a_i besteht. Ist O der Anfangspunkt in R_n und bezeichnet $\mathfrak{r}_i$ den Vektor $\overrightarrow{OP_i}$, so betrachten wir die Körper

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K} - \mathfrak{r}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu);$$

$\mathfrak{K}_i$ entsteht also aus $\mathfrak{K}$ durch Parallelverschiebung so, daß der Punkt P_i in den Anfangspunkt O fällt. Bedeuten $S_i, H_i, \mathfrak{n}_i$ die dem Körper $\mathfrak{K}_i$ entsprechenden Gebilde, so ist also

$$S_i(O) \parallel S(P_i), \quad \mathfrak{n}_i(O) = \mathfrak{n}(P_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Wir wollen jetzt den Durchschnitt

$$\varDelta = \bigcap_{i=1}^{\nu} H_i(O)$$

bestimmen. Der Punkt Q liegt offenbar dann und nur dann in $\varDelta$, wenn der Vektor $\mathfrak{q} = \overrightarrow{OQ}$ den Ungleichungen

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{n}_i(O)) = (\mathfrak{q}, \mathfrak{n}(P_i)) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{6}$$

genügt. Da wegen (5) die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i (\mathfrak{q}, \mathfrak{n}(P_i)) = 0 \qquad (a_i > 0)$$

besteht, so können die Ungleichungen (6) dann und nur dann bestehen, wenn

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{n}(P_i)) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ist; dies bedeutet aber, daß Q auf $S_i(O)$ liegt $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Folglich ist

$$\varDelta = \bigcap_{i=1}^{\nu} H_i(O) = \bigcap_{i=1}^{\nu} S_i(O).$$

Da keine zwei der Stützebenen $S_i(O)$ parallel sind, so haben die Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_\nu$ paarweise innere Punkte gemeinsam (vgl. Hilfssatz 4). Dasselbe gilt offenbar auch dann, wenn man $\mathfrak{K}_1$ genügend wenig parallel verschiebt, etwa in der Richtung von $\mathfrak{n}_1(O)$. Sei $\mathfrak{K}_1'$ die verschobene Stellung von $\mathfrak{K}_1$, und O' die verschobene Stellung von O. Wir behaupten, daß die Körper $\mathfrak{K}_1', \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_\nu$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen. In der Tat, es gilt $H_1'(O') \subset H_1(O)$ und folglich ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1' \cap \mathfrak{K}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{K}_\nu \subset H_1'(O') \cap H_2(O) \cap \ldots \cap H_\nu(O) &= \\ = H_1'(O') \cap H_1(O) \cap H_2(O) \cap \ldots \cap H_\nu(O) &= \\ = H_1'(O') \cap S_1(O) \cap S_2(O) \cap \ldots \cap S_\nu(O) &= \text{leer},\end{aligned}$$

da ja der Halbraum $H_1'(O')$ im Inneren des Halbraumes $H_1(O)$ liegt und so keinen gemeinsamen Punkt mit $S_1(O)$ hat.

Damit ist der Beweis des Satzes fertig.

(Eingegangen am 1. März 1954.)

On the contractive linear transformations of n-dimensional vector space.

By E. EGERVÁRY in Budapest.

Notations.

a scalar	$\mathbf{a}^*, \mathbf{A}^*$ conjugate transposed of $\mathbf{a}, \mathbf{A}$
$\mathbf{a}$ column vector	$\mathbf{E}_k$ k-th order unit matrix
$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matrix	$\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \rangle$ partitioned diagonal matrix

1. Consider a contractive linear transformation or contraction $\mathbf{T}$ of the n-dimensional vector space R_n, i. e. such that for every $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^*\mathbf{T}^*\mathbf{T}\mathbf{x} \leqq \mathbf{x}^*\mathbf{x}.$$

It is known[1]) that a contraction can be represented as the product of a unitary transformation $\mathbf{U}$ in the $2n$-dimensional space R_{2n} and an orthogonal projection $\mathbf{P}$ on the original R_n. Using the symbols of matrix algebra, this assertion can be expressed as follows:

For any n-th order contractive matrix $\mathbf{T}$ there is a $2n$-th order unitary matrix $\mathbf{U}$ and a $2n$-th order orthogonal projector $\mathbf{P}$ such that

$$\mathbf{PU} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

where the asterisks denote n-th order submatrices whose expressions are not needed. By the aid of these symbols the original transformation $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{Tx}$ of R_n appears as a transformation of the subspace R_n of R_{2n}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{PU} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Tx} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

An analogous decomposition exists for the contractions of Hilbert space.

Recently B. SZ.-NAGY[2]) has found a similar representation simultaneously for all powers of a contraction and of its transposed. His theorem reads as follows:

---

1) P. R. HALMOS, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, **2** (1950), 125—134.

2) B. SZ.-NAGY, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *these Acta,* **15** (1953), 87—92; Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *these Acta,* **15** (1954), 104—114.

If $\mathbf{T}$ is a contraction of Hilbert space H, then there is a unitary transformation $\mathbf{U}$ of an other Hilbert space (which contains H as a subspace) such that for every vector $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix}$ from H we have

$$\mathbf{T}^k\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix}=\mathbf{P}\mathbf{U}^k\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}^{*k}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix}=\mathbf{P}\mathbf{U}^{-k}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix}\qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

where $\mathbf{P}$ denotes the orthogonal projection on H.

In the present note I shall investigate with elementary tools the following finite analogon of B. Sz.-Nagy's problem: Is there a similar, but elementary matrix-representation for the first k positive powers of a contraction of R_n? The answer is given by the following

Theorem. *If $\mathbf{T}$ is a contraction of R_n, then R_n can be embedded in an $R_{(k+1)n}$ in such a way that we have*

$$\mathbf{P}\mathbf{U}^{\varkappa}=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{T}^{\varkappa} & *\\ * & *\end{bmatrix}}_{n\ \ nk}\begin{matrix}\}\,n\\ \}\,kn\end{matrix}\qquad (\varkappa=1,2,\ldots k)$$

where $\mathbf{U}$ is unitary, i.e. $\mathbf{U}\mathbf{U}^*=\mathbf{E}_{(k+1)n}$, and $\mathbf{P}$ is an orthogonal projector, i. e. $\mathbf{P}^*=\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$.

By the aid of these symbols the first, second, ..., k-th power of the original transformation $\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{T}\mathbf{x}$ of R_n appear as transformations of the subspace R_n of $R_{(k+1)n}$:

$$\begin{matrix}n\{\\ kn\{\end{matrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{(\varkappa)}\\0\end{bmatrix}=\mathbf{P}\mathbf{U}^{\varkappa}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{E}_n & 0\\0 & 0\end{bmatrix}}_{n\ \ kn}\begin{bmatrix}\mathbf{T} & *\\ * & *\end{bmatrix}^{\varkappa}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}^{\varkappa}\mathbf{x}\\0\end{bmatrix}\qquad(\varkappa=1,2,\ldots,k).$$

2. In order to prove our theorem, let us begin with an elementary study of the simplest case: $n=1$, $k=2$, $\mathbf{T}=\overline{\mathbf{T}}$. In this case $\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{T}\mathbf{x}$ means a contraction of R_1, i.e. of a straight line, which can be represented by

$$x^{(1)}=\cos\varphi\cdot x\qquad(\varphi\text{ real}),$$

and now we have to find a rotation $\mathbf{O}$ of R_3 such that

$$\left\{\begin{array}{l}\text{the orthogonal projection of }\mathbf{O}\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}\text{ on }0x\text{ is }\mathbf{T}\mathbf{x}=\cos\varphi\cdot x,\\[2ex] \text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\ \mathbf{O}^2\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}\ \text{,,}\ \text{,,}\ \text{,,}\ \mathbf{T}^2\mathbf{x}=\cos^2\varphi\cdot x.\end{array}\right.$$

The rotation $\mathbf{O}_z=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ brings the point $\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}$ into $\begin{bmatrix}x\cos\varphi\\x\sin\varphi\\0\end{bmatrix}$

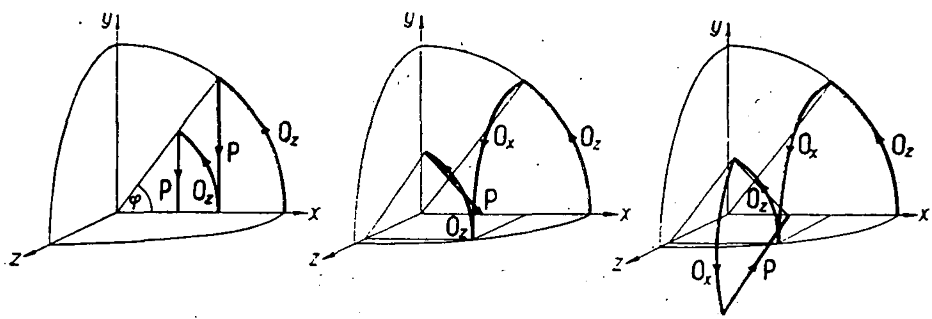
whose orthogonal projection on $0x$ is

$$\mathbf{PO}_z\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\cos\varphi\\x\sin\varphi\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\varphi\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}\mathbf{x}\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Hence

$$\mathbf{PO}_z=\begin{bmatrix}\cos\varphi&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{bmatrix}.$$

Denote the rotation around the axis $0x$ through the angle $\frac{\pi}{2}$ by $\mathbf{O}_x$, and the orthogonal projection on $0x$ by $\mathbf{P}$. Further compare the three figures below:



An inspection of these figures shows clearly, that the transformation $\mathbf{T}^2$ i. e. $x^{(2)}=\cos^2\varphi\cdot x$ can be decomposed into rotations and projections in different manners:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{T}^2\mathbf{x}\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{PO}_z\mathbf{PO}_z\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{PO}_z\mathbf{O}_x\mathbf{O}_z\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{PO}_x\mathbf{O}_z\mathbf{O}_x\mathbf{O}_z\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}.$$

The first one is a simple iteration of the previously found decomposition $\mathbf{T}=\mathbf{PO}_z$, while the third furnishes the representation $\mathbf{T}^2=\mathbf{PO}^2$ with $\mathbf{O}=\mathbf{O}_x\mathbf{O}_z$. We have at the same time $\mathbf{T}=\mathbf{PO}=\mathbf{PO}_x\mathbf{O}_z$, because obviously $\mathbf{PO}_x=\mathbf{P}$.

Consequently the rotation $\mathbf{O}$ which satisfies the conditions (1) is given by

$$\mathbf{O}=\mathbf{O}_x\mathbf{O}_z=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\0&0&-1\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\end{bmatrix}.$$

Thus we proved that the projection of the first and second power of the rotation $\mathbf{O}$, applied on the points (vectors) of the $0x$ axis furnish the first and second power of the contraction $\mathbf{T}$.

This intuitive treatment suggests that in order to find a similar representation for the three first powers of $\mathbf{T}$ we need the four dimensional space, and a convenient orthogonal matrix will be found by multiplying $\begin{bmatrix} \mathbf{O}_x\mathbf{O}_z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ from the left by $\mathbf{O}_w$, i. e. by the matrix of the rotation round the fourth axis $0w$ through the angle $\frac{\pi}{2}$. We get in this way

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_w \langle \mathbf{O}_x \mathbf{O}_z, 1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{O}$ is obviously orthogonal, being the product of orthogonal matrices, and an easy calculation shows that $\mathbf{O}$ satisfies all the requirements of the problem.

We generalise now this result to the case $n = 1$, k arbitrary, and prove that

$$\text{(2)} \qquad k\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{T}^\varkappa x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix} \cos^\varkappa\varphi \cdot x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{O}^\varkappa \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

where $\mathbf{P} = \langle 1, \underbrace{0, \ldots 0}_{k} \rangle$, and

$$\mathbf{O} = \left.\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ -s & c & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\right\} k+1, \quad c = \cos\varphi, s = \sin\varphi.$$

Obviously, $\mathbf{O}\mathbf{O}^* = \mathbf{E}_{k+1}$, thus $\mathbf{O}$ is a rotation of R_{k+1}, and we have only to show that the element in the upper left corner of $\mathbf{O}^\varkappa$ is equal to $c^\varkappa = \cos^\varkappa\varphi$, when $\varkappa \leqq k$. Denote the elements of $\mathbf{O}^\varkappa$ by $a_{ij}^{(\varkappa)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k+1)$. Since

$$a_{11}^{(1)} = c, \quad a_{12}^{(1)} = s, \quad a_{k+1,1}^{(1)} = -s, \quad a_{k+1,2}^{(1)} = c, \quad a_{23}^{(1)} = a_{34}^{(1)} = \cdots = a_{k,k+1}^{(1)} = -1,$$

$$\text{each other } a_{ij}^{(1)} = 0,$$

the application of the relations

$$a_{ij}^{(\varkappa)} = a_{i1}^{(\varkappa-1)} a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(\varkappa-1)} a_{2j}^{(1)} + \cdots + a_{i,k+1}^{(\varkappa-1)} a_{k+1,j}^{(1)}$$

proves, by induction,

$$a_{1,k+1}^{(\varkappa)} = -a_{1,k}^{(\varkappa-1)} = \cdots = \pm a_{1,k-\varkappa+2}^{(1)} = 0 \quad \text{for} \quad \varkappa \leqq k-1,$$

and

$$a_{11}^{(\varkappa+1)} = a_{11}^{(\varkappa)} a_{11}^{(1)} + a_{1,k+1}^{(\varkappa)} a_{k+1,1}^{(1)} = a_{11}^{(\varkappa)} a_{11}^{(1)} \quad \text{for} \quad \varkappa \leqq k-1.$$

Hence

$$a_{11}^{(\varkappa)} = a_{11}^{\varkappa} = \cos^{\varkappa}\varphi \quad \text{for} \quad \varkappa \leqq k. \tag{2.1}$$

Q. e. d.

Thus we proved that the projections of the first, second, ..., k-th power of the rotation $\mathbf{O}$, applied on the points of the $0x_1$ axis, furnish the first, second, ..., k-th power of the contraction $x_1^{(1)} = \cos\varphi \cdot x_1$.

3. Let us now consider the general case of a contractive transformation of R_n. Let $\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{V}$ be the polar factorisation, where $\mathbf{C} = (\mathbf{T}\mathbf{T}^*)^{1/2}$ is (semi-) definite and $\mathbf{V}$ is unitary.

$\mathbf{C}$ as well as $\mathbf{T}$ being contractive, there is a uniquely determined positive (semi-) definite square-root of $\mathbf{E}_n - \mathbf{C}^2$, which we denote by $\sqrt{\mathbf{E}_n - \mathbf{C}^2}$. Consider now the $(k+1)n$-th order matrix $\mathbf{U}$ in the partitioned form

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{CV} & \sqrt{\mathbf{E}_n - \mathbf{C}^2}\,\mathbf{V} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{E}_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{E}_n \\ -\sqrt{\mathbf{E}_n - \mathbf{C}^2}\,\mathbf{V} & \mathbf{CV} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{E}_{(k+1)n}. \tag{3}$$

We write the vectors of $R_{(k+1)n}$ in the partitioned form $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix}$ where $\mathbf{x}_1$ is the component belonging to the subspace R_n.

With these notations we can write at once the analogon of the equations (2)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{\varkappa}\mathbf{x}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{U}^{\varkappa} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots, k), \tag{4}$$

where $\mathbf{P} = \langle \mathbf{E}_n, 0, \dots, 0 \rangle$ and the unitary matrix $\mathbf{U}$ is given by (3). Due to the coincidence of the multiplication-rules for ordinary matrices and hypermatrices, the proof given for the equations (2) remains valid for the equations (4) if one replaces the elements $c, s, 1, 0,$ by the submatrices $\mathbf{CV}$, $\sqrt{\mathbf{E}_n - \mathbf{C}^2}\,\mathbf{V}$, $\mathbf{E}_n$, 0, respectively. So the proof of our Theorem is complete.

(Received January 6, 1954.)

Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

1. Soit $f(x, y)$ une fonction réelle à deux variables réelles, définie et ayant de valeurs finies dans le plan entier (x, y). On considère en Analyse classique des types d'allure de cette fonction au voisinage d'un point (x_0, y_0) qui peuvent être caractérisés par la structure locale des ensembles de niveau

$$\underset{x,\,y}{E}[f(x, y) < f(x_0, y_0)], \quad \underset{x,\,y}{E}[f(x, y) \leqq f(x_0, y_0)],$$

$$\underset{x,\,y}{E}[f(x, y) > f(x_0, y_0)], \quad \underset{x,\,y}{E}[f(x, y) \geqq f(x_0, y_0)]$$

de cette fonction, comme p. ex. les maxima et minima (au sens strict ou au sens large). Nous allons étudier dans cet article deux séries de types d'allure qui sont caractérisés par la structure locale des ensembles de niveau en question dans un domaine angulaire issu du point (x_0, y_0). Le but de cette note est d'examiner les différentes combinaisons de ces types d'allure qui peuvent se présenter dans deux domaines angulaires issus d'un même point et d'établir une série de théorèmes qui prouvent que quelques-unes parmi ces combinaisons sont exceptionnelles en certain sens.

De problèmes analogues pour les fonctions à une variable ont été traités dans un autre article de l'auteur [1]. La généralisation des notions introduites et des résultats obtenus à des fonctions à plusieurs variables ne semble imposer que des difficultés peu essentielles et de nature géométrique.

2. On va employer dans ce qui suit, pour simplifier la notation, une seule variable complexe $z = x + iy$ au lieu des deux variables réelles x et y. On désignera par $S(z_0, r_0, \alpha, \beta)$ l'ensemble des points

$$z = z_0 + re^{i\varphi}, \quad 0 < r < r_0, \quad \alpha < \varphi < \beta.$$

Considérons une famille $\mathfrak{N}$ de sous-ensembles du plan complexe qui satisfait aux conditions suivantes:

(2.1) $\quad$ si $A \in \mathfrak{N}$ et si $B \subset A$, on a $B \in \mathfrak{N}$;

(2.2) $\quad$ si $A_k \in \mathfrak{N}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{N}$.

On pourra donner le rôle de la famille $\mathfrak{N}$ p. ex. à la famille des ensembles dénombrables, à celle des ensembles de mesure (plane) nulle, à celle des ensembles de mesure linéaire nulle, à celle des ensembles qui peuvent être couverts avec une suite d'ensembles de mesure linéaire finie, à la famille qui ne contient que l'ensemble vide, etc.

Convenons des définitions suivantes:

a) la fonction $f(z)$ a la propriété $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0, si

$$\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \in \mathfrak{N}$$

pour un nombre $r > 0$ convenable;

b) $f(z)$ a la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0, si

$$\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), \ z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \in \mathfrak{N}$$

pour un nombre $r > 0$ convenable, mais on a pour tout $r > 0$

$$\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{N};$$

c) $f(z)$ a la propriété $O_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0, si l'on a pour tout nombre $r > 0$

$$\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{N}$$

et

$$\underset{z}{E}[f(z) > f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{N}.$$

On définit les propriétés $D_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ et $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ en remplaçant dans les définitions *a*) et *b*) les inégalités $f(z) \leqq f(z_0)$ et $f(z) < f(z_0)$ par celles $f(z) \geqq f(z_0)$ et $f(z) > f(z_0)$ respectivement.

On s'appuyera dans ce qui suit sur le théorème suivant, faisant partie du théorème de Kolmogoroff et Vertchenko sur le contingent des ensembles plans [2]:

(2. 3) *Si à tout point z_0 d'un ensemble E correspondent des nombres $r > 0$ et $\alpha < \beta$ tels que $E \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta) = 0$, l'ensemble E peut être recouvert avec une suite dénombrable d'arcs rectifiables.*

Le grand rôle qui sera joué par les ensembles plans qu'on peut recouvrir avec une suite dénombrable d'arcs rectifiables justifie l'introduction de la notation $\mathfrak{H}$ pour la famille de ces ensembles et de celle $\mathfrak{N}^*$ pour la famille des ensembles de la forme $N + H$, où $N \in \mathfrak{N}$ et $H \in \mathfrak{H}$. Ces deux familles satisfont évidemment à deux conditions analogues à (2. 1) et à (2. 2).

On démontre sans peine la généralisation suivante de (2. 3):

(2. 4) *Si à tout point z_0 d'un ensemble E correspondent des nombres $r > 0$ et $\alpha < \beta$ tels que $E \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta) \in \mathfrak{N}$, on a $E \in \mathfrak{N}^*$.*

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par E_{pqn} l'ensemble des points z_0 tels que

(2. 5) $$z_0 \in E,$$

(2. 6) $$E \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p, q\right) \in \mathfrak{N}.$$

On a évidemment

$$(2.7) \qquad E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p,\, q \in R \\ p < q}} E_{pqn},$$

où R désigne l'ensemble des nombres rationnels (notation qui sera employée dans tout ce qui suit). D'après (2. 3), les points z_0 de l'ensemble E_{pqn} tels que $E_{pqn} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right) = 0$ forment un ensemble $E'_{pqn} \in \mathfrak{H}$. Mais si $z_0 \in E''_{pqn} = E_{pqn} - E'_{pqn}$, il existe un point $z_1 \in E_{pqn} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right)$ et alors $S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)$ contient un cercle convenable K_{z_0} ayant z_0 pour centre. En appliquant (2. 6) pour z_1 au lieu de z_0, on obtient $E_{pqn} \cdot K_{z_0} \subset E \cdot S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right) \in \mathfrak{N}$. La réunion des cercles K_{z_0} contient l'ensemble E''_{pqn}, donc la réunion d'une suite dénombrable convenablement choisie de ces cercles contient E''_{pqn} elle aussi. On a donc $E''_{pqn} \in \mathfrak{N}$, d'où $E_{pqn} = E'_{pqn} + E''_{pqn}$ ce qui montre, d'après (2. 7), la validité de la proposition.

Nous aurons besoin de la proposition suivante:

(2. 8) *Si* $p < r < s < q \leqq p + \frac{\pi}{2}$ *et* $0 < R < R'$, *on a pour un nombre* $\varepsilon > 0$ *convenable*

$$S(z_0, R', r, s) - S(z_0, R, r, s) \subset S(z, R', p, q) \quad pour \quad z \in S(z_0, \varepsilon, p, q).$$

On la démontre sans difficulté par un raisonnement de géométrie élémentaire.

3. Nous allons étudier dans ce point la question de trouver des combinaisons des types d'allure $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N}), \ldots, D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ qui ne se présentent dans deux domaines angulaires issus d'un même point qu'exceptionnellement (d'un certain point de vue).

Nous commençons par la démonstration d'un lemme:

(3. 1) *Si à tout point d'un ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta$ tels que $f(z)$ a la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ (ou $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$) en ce point, on a $E = N + K$, où $N \in \mathfrak{N}^*$ et $f(K)$ est dénombrable.**)

Démonstration. Il suffit de considérer le cas de la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$. Désignons par E_n l'ensemble des points z_0 tels que les conditions suivantes sont remplies pour des nombres $\alpha < \beta$ (qui peuvent dépendre du choix du point z_0):

$$(3.2) \qquad z_0 \in E,$$

*) Nous désignerons par $f(K)$ l'ensemble des valeurs $f(z)$, $z \in K$.

$$E_z\left[f(z)<f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\, \frac{1}{n},\, \alpha,\, \beta\right)\right]\in \mathfrak{N}, \tag{3.3}$$

$$E_z\left[f(z)\leqq f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\, \frac{1}{n},\, \alpha,\, \beta\right)-S\left(z_0,\, \frac{1}{n+1},\, \alpha,\, \beta\right)\right]\notin \mathfrak{N}. \tag{3.4}$$

On a évidemment

$$E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n, \tag{3.5}$$

car, $f(z)$ ayant la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0 pour des nombres $\alpha<\beta$ convenables, on peut choisir un entier positif n_0 tel que (3.3) soit valable pour $n\geqq n_0$; on aura

$$E_z\left[f(z)\leqq f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\, \frac{1}{n_0},\, \alpha,\, \beta\right)\right]\notin \mathfrak{N},$$

donc (3.4) sera valable pour au moins un entier $n\geqq n_0$.

Considérons maintenant l'ensemble E_{npqrs} des points z_0 tels que

$$z_0\in E_n, \tag{3.6}$$

$$E_z\left[f(z)<f(z_0),\, z\in S\left(z_0, \frac{1}{n}, p, q\right)\right]\in \mathfrak{N}, \tag{3.7}$$

$$E_z\left[f(z)\leqq f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\, \frac{1}{n}, r, s\right)-S\left(z_0,\, \frac{1}{n+1}, r, s\right)\right]\notin \mathfrak{N}. \tag{3.8}$$

On aura

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{\substack{p,q,r,s\in R\\ p<r<s<q<p+\frac{\pi}{2}}} E_{npqrs}. \tag{3.9}$$

En effet, à tout point $z_0\in E_n$ correspondent des nombres rationnels r et s tels que $\alpha<r<s<\beta$, $s-r<\dfrac{\pi}{2}$ et que (3.8) soit valable, puisqu'autrement (3.4) ne pourrait être valable, l'intervalle $\alpha<\varphi<\beta$ étant la réunion d'une suite dénombrable d'intervalles $r<\varphi<s$ du type en question. En choisissant les nombres rationnels p et q tels que $\alpha<p<r<s<q<\beta$, $q<p+\dfrac{\pi}{2}$, (3.3) entraîne (3.7), on a donc $z_0\in E_{npqrs}$, de sorte que (3.9) est la conséquence de (3.5).

En posant $E_{npqrs}=A$ $\left(p<r<s<q<p+\dfrac{\pi}{2}\right)$, considérons un point $z_0\in A$. D'après (2.8), on peut choisir un nombre $0<\varepsilon<\dfrac{1}{n}$ tel que

$$S\left(z_0, \frac{1}{n}, r, s\right)-S\left(z_0, \frac{1}{n+1}, r, s\right)\subset S\left(z, \frac{1}{n}, p, q\right)$$

pour $z \in S(z_0, \varepsilon, p, q)$. On a $f(z_1) \leqq f(z_0)$ pour $z_1 \in A \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q)$; en effet, l'inégalité $f(z_1) > f(z_0)$ entraînerait

$$\underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_0),\ z \in S\left(z_0, \frac{1}{n}, r, s\right) - S\left(z_0, \frac{1}{n+1}, r, s\right)\right] \subset$$
$$\subset \underset{z}{E}\left[f(z) < f(z_1), z \in S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)\right],$$

ce qui est impossible, le premier membre de la dernière relation n'appartenant pas, en vertu de (3. 8), à la famille $\mathfrak{N}$, quant au second membre, il appartient à $\mathfrak{N}$ d'après (3. 7) (appliqué pour z_1 au lieau de z_0). En vertu de (3. 7), $f(z)$ est donc constante sur $A \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q)$, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à $\mathfrak{N}$.

Désignons par A' le sous-ensemble de l'ensemble A qui contient les points z_0 tels que $A \cdot S(z_0, \varepsilon, p+\pi, q+\pi) \neq 0$. A tout point $z_0 \in A'$ correspond un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre de façon que $f(z)$ est constante sur $A \cdot K_{z_0}$, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à $\mathfrak{N}$. Pour le voir, on n'a qu'à choisir un point $z_1 \in A \cdot S(z_0, \varepsilon, p+\pi, q+\pi)$ et un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que $K_{z_0} \subset S(z_1, \varepsilon, p, q)$. On peut recouvrir A' avec une suite dénombrable des cercles K_{z_0}; or, tout point de l'ensemble $A'' = A - A'$ est le sommet d'un secteur circulaire qui ne contient pas des points de A, donc, en vertu de (2. 3), $A'' \in \mathfrak{H}$, d'où on obtient, d'après (3. 9), la proposition.

On peut démontrer maintenant le théorème suivant:

(3. 10) *Si à tout point z_0 de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ tels que $f(z)$ a au point z_0 une des propriétés $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ ou $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ et en même temps une des propriétés $C_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$, $D_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ ou $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$, on a $E \in \mathfrak{N}^*$.*

Démonstration. D'après (3. 1), on a la décomposition $E = N + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, où $N \in \mathfrak{N}^*$ et $f(z)$ est constante sur chacune des ensembles E_n. Soit E'_n l'ensemble des points $z_0 \in E_n$ dans lesquels $f(z)$ a une des propriétés $C_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ ou $D_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ pour des nombres $\gamma < \delta$ convenables. A tout point $z_0 \in E'_n$ correspondent donc des nombres $\gamma < \delta$ et $r > 0$ tels que $E'_n \cdot S(z_0, r, \gamma, \delta) \subset \subset \underset{z}{E}[f(z) = f(z_0), z \in S(z_0, r, \gamma, \delta)] \in \mathfrak{N}$, de sorte qu'on a en vertu de (2. 4) $E'_n \in \mathfrak{N}^*$. A tout point $z \in E_n - E'_n = E''_n$ correspondent par contre des nombres $\gamma < \delta$ tels que $f(z)$ a la propriété $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ au point z; or, z_0 étant un point de E''_n, supposons que $f(z)$ ait au point z_0 par exemple la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ de sorte qu'on ait pour $r > 0$ convenable

$$\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \in \mathfrak{N}.$$

La relation $z_1 \in E''_n \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)$ entraînerait en vertu de l'égalité $f(z_1) = f(z_0)$ l'existence d'un cercle K_{z_1} ayant z_1 pour centre et tel que $\underset{z}{E}[f(z) < f(z_1), z \in K_{z_1}] \in \mathfrak{N}$, ce qui est impossible, $f(z)$ ayant la propriété $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ au point z_1. Cette contradiction nous assure que l'ensemble $E_n''\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)$ est vide, donc, d'après (2.3), $E_n''\in\mathfrak{H}$. Puisqu'on a la relation $E=N+\sum_{n=1}^{\infty}(E_n'+E_n'')$, la proposition du théorème s'ensuit aisément.

(3.11) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha<\beta$ et $\gamma<\delta$ tels que $f(z)$ a en ce point les propriétés $C_{\alpha\beta}^*(\mathfrak{N})$ et $D_{\gamma\delta}^*(\mathfrak{N})$ en même temps, on a $E=N+L$, où $N\in\mathfrak{N}^*$ et on peut couvrir L avec une suite dénombrable de cercles de façon que $f(z)$ soit constante sur chacun d'eux, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à la famille $\mathfrak{N}$.*

Démonstration. D'après le lemme (3.1), on a la décomposition $E=N'+\sum_{n=1}^{\infty}E_n$, où $N'\in\mathfrak{N}^*$ et $f(z)$ est constante sur chacun des ensembles E_n. Soit E_{nmpqrs} l'ensemble des points z_0 tels que

(3.12) $$z_0\in E_n,$$

(3.13) $$\underset{z}{E}\left[f(z)<f(z_0),\ z\in S\left(z_0,\frac{1}{m},p,q\right)\right]\in\mathfrak{N},$$

(3.14) $$\underset{z}{E}\left[f(z)>f(z_0),\ z\in S\left(z_0,\frac{1}{m},r,s\right)\right]\in\mathfrak{N}.$$

On a évidemment

(3.15) $$E=N'+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{p,q,r,s\in R\\ p<q,\, r<s}}E_{nmpqrs}.$$

Considérons un quelconque parmi les ensembles E_{nmpqrs} qui figurent dans (3.15) et désignons-le par A. D'après (2.3), les points $z_0\in A$ tels que $A\cdot S\left(z_0,\frac{1}{m},r+\pi,s+\pi\right)=0$ forment un ensemble A' qui appartient à $\mathfrak{H}$. Soit donc z_0 un point de $A-A'$ et posons $z_1\in A\cdot S\left(z_0,\frac{1}{m},r+\pi,s+\pi\right)$; la relation $z_0\in S\left(z_1,\frac{1}{m},r,s\right)$ entraîne l'existence d'un nombre $0<\varepsilon<\frac{1}{m}$ tel que $S(z_0,\varepsilon,p,q)\subset S\left(z_1,\frac{1}{m},r,s\right)$, donc de (3.13) et (3.14) (en appliquant cette dernière relation pour z_1 au lieu de z_0), vu l'égalité $f(z_1)=f(z_0)$, on obtient
$$\underset{z}{E}[f(z)\neq f(z_0),\ z\in S(z_0,\varepsilon,p,q)]\in\mathfrak{N}.$$

Désignons par A_k l'ensemble des points z_0 tels que

(3.16) $$z_0\in A-A',$$

(3.17) $$\underset{z}{E}\left[f(z)\neq f(z_0),\ z\in S\left(z_0,\frac{1}{k},p,q\right)\right]\in\mathfrak{N}.$$

On voit d'après ce qui précède que

(3.18) $$A-A'=\sum_{k=1}^{\infty}A_k.$$

En désignant par A_k' l'ensemble formé par les points $z_0\in A_k$ tels que $A_k\cdot S\left(z_0,\frac{1}{k},p+\pi,q+\pi\right)=0$, on a d'après (2.3) la relation $A_k'\in\mathfrak{H}$. Soit donc $z_0\in A_k-A_k'$ et posons $z_1\in A_k\cdot S\left(z_0,\frac{1}{k},p+\pi,q+\overset{\circ}{\pi}\right)$; la relation $z_0\in S\left(z_1,\frac{1}{k},p,q\right)$ entraîne l'existence d'un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que $K_{z_0}\subset S\left(z_1,\frac{1}{k},p,q\right)$, donc, en appliquant (3.17) pour z_1 au lieu de z_0, on a

$$\underset{z}{E}[f(z)\neq f(z_1), z\in K_{z_0}]\subset\underset{z}{E}\left[f(z)\neq f(z_1), z\in S\left(z_1,\frac{1}{k},p,q\right)\right]\in\mathfrak{N}.$$

La fonction $f(z)$ est donc constante sur K_{z_0}, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à $\mathfrak{N}$. On peut recouvrir naturellement A_k-A_k' avec une suite dénombrable de ces cercles K_{z_0}, de sorte qu'on a en vertu de (3.18) la décomposition

$$A-A'=\sum_{k=1}^{\infty}A_k'+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k-A_k'),$$

où $\sum_{k=1}^{\infty}A_k'\in\mathfrak{H}$, et on peut recouvrir l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty}(A_k-A_k')$ avec des cercles du type indiqué dans le texte du théorème. Vu que $A'\in\mathfrak{H}$, on en obtient aisément la proposition.

Les théorèmes (3.10) et (3.11) qui précèdent montrent que quelques-unes parmi les combinaisons des propriétés $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N}),\ldots,D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ ne peuvent se présenter qu'exceptionnellement en deux domaines angulaires quelconques issus d'un même point. Par contre, dans le théorème (3.19) qui va suivre; il est essentiel de parler de deux domaines angulaires opposés par le sommet, puisqu'en les remplaçant par deux domaines angulaires quelconques issus d'un même point, la proposition serait évidemment fausse.

(3.19) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha<\beta$ tels que $f(z)$ a en ce point les propriétés $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ et $C_{\alpha+\pi,\beta+\pi}(\mathfrak{N})$ en même temps, on a $E\in\mathfrak{N}^*$.*

Démonstration. Soit E_{npq} l'ensemble des points z_0 tels que

(3.20) $$z_0\in E,$$

(3.21) $$\underset{z}{E}\left[f(z)\leqq f(z_0), z\in S\left(z_0,\frac{1}{n},p,q\right)+S\left(z_0,\frac{1}{n},p+\pi,q+\pi\right)\right]\in\mathfrak{N}.$$

On a évidemment

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p,q \in R \\ p<q}} E_{npq}. \tag{3.22}$$

En désignant par E'_{npq} l'ensemble des points $z_0 \in E_{npq}$ tels que $f(z) \leqq f(z_0)$ pour $z \in E_{npq} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right)$, on a en vertu de (3.21) $E_{npq} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right) \in \mathfrak{N}$ pour $z_0 \in E'_{npq}$, donc, d'après (2.4), $E'_{npq} \in \mathfrak{N}^*$.

Soit maintenant $z_0 \in E_{npq} - E'_{npq} = E''_{npq}$ et posons

$$z_1 \in E_{npq} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right), \qquad f(z_1) > f(z_0).$$

La relation $z_0 \in S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)$ entraîne l'existence d'un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que

$$\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0), z \in K_{z_0}] \subset \underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_1), z \in S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)\right] \in \mathfrak{N}.$$

En désignant donc par E_{npqm} l'ensemble des points z_0 tels que

$$z_0 \in E''_{npq}, \tag{3.23}$$

$$\underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_0), |z-z_0| < \frac{1}{m}\right] \in \mathfrak{N}, \tag{3.24}$$

on aura

$$E''_{npq} = \sum_{m=1}^{\infty} E_{npqm}. \tag{3.25}$$

Considérons maintenant un quelconque parmi les ensembles E_{npqm} qui figurent dans (3.25) et désignons-le par A. Soit $z_0 \in A$ et posons

$$c = \sup_{\substack{z \in E_{npqm} \\ |z-z_0| < \frac{1}{2m}}} f(z).$$

S'il existe un point z_1 tel que $|z_1 - z_0| < \frac{1}{2m}$, $z_1 \in A, f(z_1) = c$, on conclut en appliquant (3.24) pour z_1 au lieu de z_0 que

$$\underset{z}{E}\left[|z-z_0| < \frac{1}{2m}, z \in A\right] \subset \underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_1), |z-z_1| < \frac{1}{m}\right] \in \mathfrak{N}.$$

Si par contre il n'y a pas de point jouissant des propriétés en question, soit $\{z_k\}$ une suite telle que

$$z_k \in A, \qquad |z_k - z_0| < \frac{1}{2m}, \qquad f(z_k) \to c;$$

on aura en ce cas

$$\underset{z}{E}\left[|z-z_0|<\frac{1}{2m}, z\in A\right]\subset\sum_{k=1}^{\infty}\underset{z}{E}\left[f(z)\leqq f(z_k), |z-z_k|<\frac{1}{m}\right],$$

d'où en appliquant (3. 24) pour z_k au lieu de z_0

$$\underset{z}{E}\left[|z-z_0|<\frac{1}{2m}, z\in A\right]\in\mathfrak{N}.$$

Cette relation dernière étant valable dans l'un et l'autre cas, on conclut, eu égard à ce que l'on peut recouvrir l'ensemble A avec une suite dénombrable des cercles $|z-z_0|<\frac{1}{2m}$, que $A=E_{npqm}\in\mathfrak{N}$, donc, d'après (3. 25), que $E''_{npq}\in\mathfrak{N}$. L'ensemble E'_{npq} appartenant à la famille $\mathfrak{N}^*$, on a donc $E_{npq}\in\mathfrak{N}^*$ et on en obtient la proposition en vertu de (3. 22).

4. Nous allons étudier dans ce qui suit la structure "approximative" des ensembles de niveau. Désignons à ce but par $|E|$ la mesure plane extérieure de Lebesgue de l'ensemble E et convenons des notations suivantes: les nombres $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ étant donnés et E étant un ensemble plan quelconque, soit

$$\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)=\overline{\lim_{r\to+0}}\frac{|E\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)|}{|S(z_0, r, \alpha, \beta)|}$$

et

$$\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)=\underline{\lim_{r\to+0}}\frac{|E\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)|}{|S(z_0, r, \alpha, \beta)|}.$$

Si $\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)=\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)$, nous désignerons la valeur commune de ces deux limites par $D(E, z_0, \alpha, \beta)$. On voit aisément que le théorème de Lebesgue sur les points de densité*) s'applique aux limites que nous venons d'introduire, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant:

(4. 1) *E étant un ensemble plan quelconque, on a en presque tous les points de E l'égalité $D(E, z_0, \alpha, \beta)=1$ pour $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ arbitraires.*

On a en outre les inégalités suivantes:

(4. 2) $$0\leqq\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)\leqq\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)\leqq 1$$

pour $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ quelconques;

(4. 3) $$\underline{D}(E, z_0, \alpha', \beta')\leqq\frac{\beta'-\alpha'}{\beta-\alpha}\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)$$

et

$$\bar{D}(E, z_0, \alpha', \beta')\leqq\frac{\beta'-\alpha'}{\beta-\alpha}\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)$$

pour $\alpha\leqq\alpha'<\beta'\leqq\beta\leqq\alpha+2\pi$.

---

*) Voir p. ex. SAKS [3], p. 117.

Les définitions suivantes correspondent à celles du n° 2:

a) La fonction $f(z)$ a la propriété $\Gamma_{\alpha\beta}$ au point z_0, si on a $D(E, z_0, \alpha, \beta) = 0$ pour l'ensemble $\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] = E$.

b) $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ au point z_0, si on a $D(E', z_0, \alpha, \beta) = 0$ pour $E' = \underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)]$, mais $\bar{D}(E, z, \alpha, \beta) > 0$ pour $E = \underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)]$.

c) $f(z)$ a la propriété $\Omega_{\alpha\beta}$ au point z_0, si on a $\bar{D}(E', z_0, \alpha, \beta) > 0$ et $\bar{D}(E'', z_0, \alpha, \beta) > 0$ pour $E' = \underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)]$ et $E'' = \underset{z}{E}[f(z) > f(z_0)]$.

On obtient les définitions des propriétés $\Delta_{\alpha\beta}$ et $\Delta^*_{\alpha\beta}$ en remplaçant dans les définitions *a*) et *b*) les inégalités $f(z) \leqq f(z_0)$ et $f(z) < f(z_0)$ par celles $f(z) \geqq f(z_0)$ et $f(z) > f(z_0)$ respectivement.

5. Nous allons établir des théorèmes analogues à ceux du n° 3. Nous commençons par la démonstration du lemme suivant:

(5. 1) *Si à tout point z_0 de l'ensemble E correspondent des nombres $r_0 > 0$ et $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ tels que*

$$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E], z_0, \alpha, \beta) = 0$$

et qu'on ait $f(z) \leqq f(z_0)$ pour $z \in E \cdot S(z_0, r_0, \alpha, \beta)$, on a $E = N + Q$, où $|N| = 0$ et $f(Q)$ est dénombrable.

Démonstration. Soit E_{npq} l'ensemble des points z_0 tels que

$$z_0 \in E, \tag{5.2}$$

$$f(z) \leqq f(z_0) \text{ pour } z \in E \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p, q\right), \tag{5.3}$$

$$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E], z_0, p, q) = 0, \tag{5.4}$$

$$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E] \cdot S(z_0, r, p, q)| < \frac{1}{4}|S(z_0, r, p, q)| \text{ pour } 0 < r \leqq \frac{1}{n}. \tag{5.5}$$

Nous allons prouver que

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p, q \in R \\ p < q < p + \frac{\pi}{2}}} E_{npq}. \tag{5.6}$$

En effet, en déterminant pour $z_0 \in E$ donné les nombres r_0, α et β qui correspondent par hypothèse au point z_0, (5. 3) est valable lorsque $\frac{1}{n} \leqq r_0$ et $\alpha \leqq p < q \leqq \beta$, (5. 4) est vrai d'après (4. 2) et (4. 3) lorsque $\alpha \leqq p < q \leqq \beta$, et, après avoir fixé les nombres rationnels p et $q < p + \frac{\pi}{2}$ qui satisfont à cette dernière inégalité, (5. 5) est aussi valable pour n suffisamment grand.

En vertu de (5. 6), la proposition du lemme sera démontrée si on établit une décomposition

(5. 7) $$E_{npq} = N_{npq} + Q_{npq}$$

pour chacun des ensembles E_{npq} qui figurent dans (5. 6), où $|N_{npq}| = 0$ et $f(Q_{npq})$ est dénombrable.

Considérons donc un ensemble E_{npq} figurant dans (5. 6). Si $|E_{npq}| = 0$, (5. 7) est évidemment valable. Supposons donc que la mesure extérieure de l'ensemble $A = E_{npq}$ soit positive. Désignons alors par A_m l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 8) $$z_0 \in A,$$

(5. 9) $$|A \cdot S(z_0, r, p, q)| > \frac{3}{4} |S(z_0, r, p, q)| \quad \text{pour} \quad 0 < r \leqq \frac{1}{m}.$$

On a d'après (4. 1)

(5. 10) $$A = B + \sum_{m=1}^{\infty} A_m,$$

où $|B| = 0$.

Soit $z_0 \in A_m$ et supposons qu'on puisse trouver une suite $\{z_k\}$ telle que, en posant $\delta = \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$,

(5. 11) $$z_k \in A_m \cdot S(z_0, \delta, p, q), \quad z_k \to z_0, \quad f(z_k) < f(z_0).$$

Il s'ensuit de l'inégalité $q - p < \frac{\pi}{2}$ que

(5. 12) $$S(z_k, \delta_k, p, q) \subset S(z_0, \delta, p, q),$$

où on a posé $\delta_k = \delta - |z_k - z_0|$. Puisque $\delta_k \to \delta$, on a encore

(5. 13) $$|S(z_k, \delta_k, p, q)| \to |S(z_0, \delta, p, q)|.$$

δ_k étant moindre que $\delta \leqq \frac{1}{n}$, en appliquant (5. 3) pour z_k au lieu de z_0,

$$A \cdot S(z_k, \delta_k, p, q) \subset \underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_k), z \in E] \cdot S(z_k, \delta_k, p, q) \subset$$
$$\subset \underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E] \cdot S(z_0, \delta, p, q),$$

eu égard à (5. 11) et (5. 12); donc, en vertu de (5. 5),

$$|A \cdot S(z_k, \delta_k, p, q)| < \frac{1}{4} |S(z_0, \delta, p, q)|,$$

ce qui entraîne d'après (5. 13) pour k suffisamment grand

$$|A \cdot S(z_k, \delta_k, p, q)| < \frac{1}{2} |S(z_k, \delta_k, p, q)|,$$

et ceci fournit en appliquant (5. 9) pour z_k au lieu de z_0, vu l'inégalité $\delta_k < \delta \leqq \frac{1}{m}$, une contradiction.

On voit donc qu'il n'y a pas de suite $\{z_k\}$ qui satisfait à (5. 11). A tout point $z_0 \in A_m$ correspond donc un ε, $0 < \varepsilon \leqq \delta$, tel que

$$z \in A_m \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q) \quad \text{entraîne} \quad f(z) \geqq f(z_0),$$

d'où, vu (5. 3),

$$z \in A_m \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q) \quad \text{entraîne} \quad f(z) = f(z_0).$$

En désignant donc par A_{ms} l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 14) $$z_0 \in A_m$$

et que

(5. 15) $$z \in A_m \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p, q\right) \quad \text{entraîne} \quad f(z) = f(z_0),$$

on a

(5. 16) $$A_m = \sum_{s=1}^{\infty} A_{ms}.$$

Soit A'_{ms} l'ensemble des points $z_0 \in A_{ms}$ tels que

$$A_{ms} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi\right) = 0.$$

En vertu de (2. 3), on a $A'_{ms} \in \mathfrak{H}$, donc $|A'_{ms}| = 0$. Si par contre $z_0 \in A_{ms} - A'_{ms}$, soit $z_1 \in A_{ms} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi\right)$; on a alors $z_0 \in S\left(z_1, \frac{1}{s}, p, q\right)$, il existe donc un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que $K_{z_0} \subset S\left(z_1, \frac{1}{s}, p, q\right)$. En appliquant (5. 15) pour z_1 au lieu de z_0, on conclut que $f(z) = f(z_1)$ pour $z \in A_{ms} \cdot K_{z_0}$. On peut recouvrir l'ensemble $A_{ms} - A'_{ms}$ avec une suite dénombrable des cercles K_{z_0}, ce qui nous assure que $f(A_{ms} - A'_{ms})$ est dénombrable. On a donc $A_{ms} = B_{ms} + C_{ms}$, où $|B_{ms}| = 0$ et $f(C_{ms})$ est dénombrable; eu égard à (5. 16) et à (5. 10), ceci entraîne (5. 7).

En s'appuyant sur (5. 1), on démontre le théorème suivant:

(5. 17) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ tels que $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ en ce point, on a $E = N + Q$, où $|N| = 0$ et $f(Q)$ est dénombrable.*

Démonstration. Désignons par E_{nm} l'ensemble des points $z_0 \in E$ auxquels correspondent des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ tels que

(5. 18) $$\bar{D}(\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)], z_0, \alpha, \beta) > \frac{1}{m},$$

(5. 19) $$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)], z_0, \alpha, \beta) = 0,$$

(5. 20) $$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)| < \frac{1}{32m} |S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)|,$$

$$(5.21)\qquad |\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta))| >$$

$$> \frac{1}{4m}|S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta)|.$$

Nous allons montrer que

$$(5.22)\qquad E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E_{nm}.$$

En effet, z_0 étant un point quelconque de l'ensemble E, (5. 19) est valable pour des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha+2\pi$ convenables et, pour les mêmes nombres α et β, (5. 18) a aussi lieu lorsque m et suffisamment grand. En fixant l'entier positiv m, on peut choisir un nombre naturel n_0 tel que (5. 20) soit valable pour $n \geqq n_0$. Si (5. 21) n'était vrai pour aucun entier $n \geqq n_0$, à tout nombre $0 < r < 2^{-n_0}$ correspondrait un nombre naturel n_1 tel que $2^{-n_1-1} \leqq r < 2^{-n_1}$; on aurait donc $n_1 \geqq n_0$ et

$$S(z_0, 2^{-n_1-1}, \alpha, \beta) \subset S(z_0, r, \alpha, \beta) \subset$$

$$\subset \sum_{n=n_1}^{\infty}[S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta)],$$

donc

$$|\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=n_1}^{\infty}|\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta))| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{4m}\,|S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta)| =$$

$$=\frac{1}{4m}|S(z_0, 2^{-n_1}, \alpha, \beta)| = \frac{1}{m}|S(z_0, 2^{-n_1-1}, \alpha, \beta)| \leqq \frac{1}{m}|S(z_0, r, \alpha, \beta)|.$$

Ceci entraîne que

$$\bar{D}(\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)], z_0, \alpha, \beta) \leqq \frac{1}{m},$$

donc, vu que

$$D(\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)], z_0, \alpha, \beta)=0,$$

l'inégalité (5. 18) est impossible. Cette contradiction montre que (5. 21) a lieu pour au moins un entier $n \geqq n_0$, donc que $z_0 \in E_{nm}$.

Ceci établi, soit E_{nmpq} l'ensemble des points $z_0 \in E_{nm}$ tels que l'on puisse choisir deux nombres γ et $\delta > \gamma$ de façon que l'on ait

$$(5.23)\qquad \gamma < p < q < \delta \leqq \gamma+\frac{\pi}{2}, \quad q-p > \frac{2}{3}(\delta-\gamma),$$

$$(5.24)\qquad D(\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)], z_0, p, q)=0,$$

$$(5.25)\qquad |\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)| < \frac{1}{8m}|S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)|,$$

$$(5.26)\qquad |\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, p, q)-S(z_0, 2^{-n-1}, p, q))| >$$

$$> \frac{1}{4m}|S(z_0, 2^{-n}, p, q)-S(z_0, 2^{-n-1}, p, q)|.$$

Nous allons montrer que

$$(5.27)\qquad E_{nm} = \sum_{\substack{p,\, q \in R \\ p<q<p+\frac{\pi}{2}}} E_{nmpq}.$$

En effet, à tout point $z_0 \in E_{nm}$ correspondent des nombres $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ tels que (5. 19), (5. 20) et (5. 21) soient valables. (5. 21) entraîne qu'en partageant l'intervalle (α, β) en quatre intervalles égaux et en désignant l'un des intervalles obtenus par (γ, δ), on a

$$(5.28)\qquad |\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta))| >$$

$$> \frac{1}{4m}|S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta)|.$$

Après avoir choisi les nombres γ et δ de sorte que (5. 28) ait lieu, considérons deux suites $\{p_k\}$ et $\{q_k\}$ de nombres rationnels telles que

$$(5.29)\qquad \gamma < p_{k+1} < p_k < q_k < q_{k+1} < \delta, \quad q_k-p_k > \frac{2}{3}(\delta-\gamma)$$

et

$$p_k \to \gamma, \quad q_k \to \delta.$$

Puisque

$$|\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, p_k, q_k)-S(z_0, 2^{-n-1}, p_k, q_k))| \to$$

$$\to |\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta))|$$

et

$$|S(z_0, 2^{-n}, p_k, q_k)-S(z_0, 2^{-n-1}, p_k, q_k)| \to |S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta)|,$$

en posant $p_k=p$ et $q_k=q$ pour un entier k suffisamment grand, (5. 26) est valable en vertu de (5. 28). En même temps, (5. 23) aura lieu d'après (5. 29), ainsi que (5. 25), vu l'inégalité

$$|\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)| \leqq$$

$$\leqq |\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)| < \frac{1}{32m}|S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)| =$$

$$= \frac{1}{8m}|S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)|$$

qui découle de (5. 20). (5. 19) entraîne enfin, eu égard à (4. 2) et à (4. 3), la relation (5. 24), c'est-à-dire qu'on a $z \in E_{nmpq}$.

En posant $E_{nmpq} = A$, considérons un point $z_0 \in A$. Supposons qu'il existe une suite $\{z_k\}$ telle que

(5. 30) $$z_k \in A \cdot S(z_0, +\infty, p+\pi, q+\pi), \quad f(z_k) < f(z_0), \quad z_k \to z_0.$$

En vertu du lemme (2. 8), on a pour k suffisamment grand

$$S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q) \subset S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta),$$

de plus, d'après (5. 23),

$$|S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q)| > \frac{1}{2} |S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)|.$$

En appliquant donc (5. 26) pour z_k au lieu de z_0 et d'après (5. 30), on a pour k suffisamment grand

$$\frac{1}{8m} |S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)| < \frac{1}{4m} |S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q)| <$$
$$< |\underset{z}{E}[f(z) = f(z_k)] \cdot (S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q))| \leqq$$
$$\leqq |\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)|,$$

ce qui est impossible en vertu de (5. 25). D'après ce qui précède, il n'existe pas de suite $\{z_k\}$ satisfaisant à (5. 30); en désignant donc par A_s l'ensemble des points $z_0 \in A$ tels que

(5. 31) $$f(z) \geqq f(z_0) \quad \text{pour} \quad z \in A \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi\right),$$

la décomposition

(5. 32) $$A = \sum_{s=1}^{\infty} A_s$$

aura lieu.

Ceci établi, considérons un point $z_0 \in A_s$. En choisissant un point $z_1 \in A_s \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p, q\right)$, on aura $z_0 \in A_s \cdot S\left(z_1, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi\right)$, donc, en appliquant (5. 31) pour z_1 au lieu de z_0, on obtient $f(z_0) \geqq f(z_1)$. Ceci montre que

$$z \in A_s \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p, q\right) \quad \text{entraîne} \quad f(z) \leqq f(z_0).$$

L'égalité

$$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in A_s], z_0, p, q) = 0$$

ayant lieu d'après (5. 24), il s'ensuit du lemme (5. 1) que $A_s = B_s + C_s$, où $|B_s| = 0$ et l'ensemble $f(C_s)$ est dénombrable. En vertu de (5. 32), (5. 27) et (5. 22), la proposition en découle.

C'est clair que l'énoncé du théorème (5. 17) reste valable lorsqu'on remplace l'hypothèse que la fonction $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ en tout point de E par celle que $f(z)$ jouit de la propriété $\Delta^*_{\alpha\beta}$ en tout point de cet ensemble. En faisant usage de ce théorème, nous démontrerons le théorème suivant:

(5. 33) *Si à tout point z_0 de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ et $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que $f(z)$ a au point z_0 une des propriétés $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ ou $\Delta^*_{\alpha\beta}$ et en même temps une des propriétés $\Gamma_{\gamma\delta}$, $\Delta_{\gamma\delta}$ ou $\Omega_{\gamma\delta}$, on a $|E| = 0$.*

Démonstration. En désignant par E' et par E'' respectivement les parties de l'ensemble E aux points desquelles $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ ou $\Delta^*_{\alpha\beta}$ pour des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ convenables, on a d'après (5. 17) les décompositions

$$E' = N' + \sum_{n=1}^{\infty} Q'_n, \quad E'' = N'' + \sum_{n=1}^{\infty} Q''_n, \tag{5. 34}$$

où $|N'| = |N''| = 0$ et $f(z)$ est constante sur chacun des ensembles Q'_n et Q''_n. Si à un point $z_0 \in Q'_n$ correspondent des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que $f(z)$ jouit de la propriété $\Gamma_{\gamma\delta}$ ou de celle $\Delta_{\gamma\delta}$ au point z_0, on a évidemment $D(Q'_n, z_0, \gamma, \delta) = 0$, donc, d'après (4. 1), l'ensemble de ces points est de mesure nulle.

Soit $A \subset Q'_n$ la partie de Q'_n qui contient les points z_0 auxquels correspondent des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que $f(z)$ a la propriété $\Omega_{\gamma\delta}$ au point z_0. En désignant par A_m l'ensemble des points $z_0 \in A$ tels que

$$\overline{D}(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)], z_0, \gamma, \delta) > \frac{1}{m} \tag{5. 35}$$

pour des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ convenables, on a évidemment

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} A_m. \tag{5. 36}$$

Considérons un point $z_0 \in A_m$. On peut choisir deux nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + {}$ ${} + 2\pi$ tels que

$$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)], z_0, \alpha, \beta) = 0,$$

il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ pour lequel on a

$$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)| < \frac{1}{2m} |S(z_0, r, \alpha, \beta)| \quad \text{pour } 0 < r \leqq \varepsilon. \tag{5. 37}$$

En fixant un nombre $0 < r \leqq \varepsilon$ et en considérant un point $z_1 \in A_m \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)$, on peut construire en appliquant (5. 35) pour z_1 au lieu de z_0 une suite $\{r_k\}$ et on peut trouver des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que

$$r_k > 0, \quad r_k \to 0, \tag{5. 38}$$

$$S(z_1, r_k, \gamma, \delta) \subset S(z_0, r, \alpha, \beta), \tag{5. 39}$$

$$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_1, r_k, \gamma, \delta)| > \frac{1}{m} |S(z_1, r_k, \gamma, \delta)|, \tag{5. 40}$$

eu égard à ce que $f(z_1)=f(z_0)$, $f(z)$ étant constante sur A. En vertu du théorème de VITALI*), il existe une suite $\{S_p\}$ des ensembles $S(z_1, r_k, \gamma, \delta)$ telle que $S_{p_1}\cdot S_{p_2}=0$ pour $p_1 \neq p_2$ et

$$A_m\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta) \subset B + \sum_{p=1}^{\infty} S_p,$$

où $|B|=0$. On aura donc d'après (5.40), (5.39) et (5.37)

$$|A_m\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)| \leqq \sum_{p=1}^{\infty}|S_p| < m\sum_{p=1}^{\infty}|\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot S_p| =$$

$$= m\left|\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot\left(\sum_{p=1}^{\infty} S_p\right)\right| \leqq$$

$$\leqq m\,|\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)| < \frac{1}{2}|S(z_0, r, \alpha, \beta)|.$$

Ceci étant valable pour $0<r\leqq\varepsilon$, on a $\bar{D}(A_m, z_0, \alpha, \beta) \leqq \frac{1}{2}$. Puisque z_0 était un point quelconque de A_m, on a d'après (4.1) $|A_m|=0$ et, vu (5.36), $|A|=0$, ce qui entraîne $|Q'_n|=0$. On démontre par un raisonnement analogue que $|Q''_n|=0$, d'où découle d'après (5.34) la proposition.

Tandis que (5.17) et (5.33) sont analogues à (3.1) et à (3.10) respectivement, le théorème suivant correspond à (3.19):

(5.41) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres α, β $(\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi)$ tels que $f(z)$ a la propriété $\Gamma_{\alpha\beta}$ et celle $\Gamma_{\alpha+\pi,\,\beta+\pi}$ en ce point, on a $|E|=0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par E_{pq} l'ensemble des points z_0 tels que

(5.42) $$z_0 \in E,$$

(5.43) $$D(\underset{z}{E}[f(z)\leqq f(z_0)], z_0, p, q) = D(\underset{z}{E}[f(z)\leqq f(z_0)], z_0, p+\pi, q+\pi) = 0.$$

On voit aisément que

(5.44) $$E = \sum_{\substack{p,\,q\in R\\ p<q<p+\frac{\pi}{2}}} E_{pq}.$$

En effet, à tout point $z_0\in E$ correspondent d'après (4.2) et (4.3) des nombres rationnels p et $q<p+\frac{\pi}{2}$ tels que $\alpha<p<q<\beta$, donc $z_0\in E_{pq}$.

En désignant par $K(z_0, r)$ le cercle $|z-z_0|<r$, considérons pour $n=1, 2, \ldots$ l'ensemble E_{pqn} des points $z_0\in E_{pq}$ tels que

(5.45) $$\overline{\lim_{r\to+0}}\frac{|\underset{z}{E}[f(z)\leqq f(z_0)]\cdot K(z_0, r)|}{|K(z_0, r)|} > \frac{1}{n}.$$

*) Voir p. ex. SAKS [3], p. 109.

Soit ε un nombre positif moindre que l'unité et désignons par E_{pqnm} l'ensemble des points $z_0 \in E_{pqn}$ tels que

$$(5.46)\qquad \begin{cases} 0 < r \leqq \dfrac{1}{m} \text{ entraîne} \\ \left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot S(z_0, r, p, q)\right| < \dfrac{2\pi}{n\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \omega} \left|S(z_0, r, p, q)\right|, \end{cases}$$

où on a posé $\omega = q - p$. On a d'après (5.43)

$$(5.47)\qquad E_{pqn} = \sum_{m=1}^{\infty} E_{pqnm}.$$

En posant $E_{pqnm} = A$, considérons un point $z_0 \in A$. En vertu de (5.45), on peut construire une suite $\{r_k\}$ telle que

$$(5.48)\qquad 0 < r_k < \frac{1}{m\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)}, \quad r_k \to 0,$$

$$(5.49)\qquad \left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K(z_0, r_k)\right| > \frac{1}{n}\left|K(z_0, r_k)\right| = \frac{1}{n} r_k^2 \pi.$$

Posons en outre

$$(5.50)\qquad l_k = \frac{4}{\varepsilon\omega} r_k, \quad S_k = S(z_0, l_k, p+\pi, q+\pi),$$

$$(5.51)\qquad T_k = S(z_0, l_k, p+\pi, q+\pi) - S\left(z_0 - \frac{r_k}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{i\frac{p+q}{2}}, +\infty, p+\pi, q+\pi\right).$$

On voit aisément que pour tout point $z_1 \in A \cdot T_k$

$$S(z_1, l_k + r_k, p, q) \supset K(z_0, r_k),$$

donc que, d'après (5.49),

$$(5.52)\qquad \left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot S(z_1, l_k + r_k, p, q)\right| >$$

$$> \frac{1}{n} r_k^2 \pi = \frac{2\pi}{n\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \omega} \left|S(z_1, l_k + r_k, p, q)\right|,$$

eu égard à ce que, d'après (5.50),

$$\left|S(z_1, l_k + r_k, p, q)\right| = (l_k + r_k)^2 \frac{\omega}{2} = r_k^2 \left(\frac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \frac{\omega}{2}.$$

Vu que d'après (5.48) $l_k + r_k = \left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right) r_k < \dfrac{1}{m}$, on obtient en appliquant (5.46) pour z_1 au lieu de z_0 l'inégalité

$$\left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_1)] \cdot S(z_1, l_k + r_k, p, q)\right| < \frac{2\pi}{n\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \omega} \left|S(z_1, l_k + r_k, p, q)\right|,$$

ce qui entraîne en vertu de (5. 52) que $f(z_1) < f(z_0)$. En résumant notre raisonnement, on a donc

(5. 53) $$f(z) < f(z_0) \quad \text{pour} \quad z \in A \cdot T_k.$$

Puisqu'on a encore

$$|A \cdot (S_k - T_k)| \leqq |S_k - T_k| < 2 l_k r_k = 2 l_k^2 \frac{\omega}{4} \varepsilon = l_k^2 \frac{\omega}{2} \varepsilon = \varepsilon |S_k|,$$

on conclut en s'appuyant sur (5. 53) que

$$|A \cdot S_k| \leqq \varepsilon |S_k| + |\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S_k|.$$

D'après (5. 50) et (5. 48), $l_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, donc (5. 43) entraîne que

$$\frac{|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S_k|}{|S_k|} \to 0,$$

d'où

$$\underline{\lim} \frac{|A \cdot S_k|}{|S_k|} \leqq \varepsilon < 1$$

et

$$\underline{D}(A, z_0, p+\pi, q+\pi) < 1.$$

Ceci étant valable pour tout point $z_0 \in A$, on a d'après (4. 1) $|A| = 0$, donc vu (5. 47), $|E_{pqn}| = 0$. Cela veut dire en vertu de (5. 45) que l'on a pour presque tous les points z_0 de l'ensemble E_{pq} la relation

(5. 54) $$\lim_{r \to +0} \frac{|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K(z_0, r)|}{|K(z_0, r)|} = 0.$$

En désignant donc par B_s l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 55) $$z_0 \in E_{pq},$$

(5. 56) $$|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K(z_0, r)| < \frac{1}{8} |K(z_0, r)| \quad \text{pour} \quad 0 < r \leqq \frac{1}{s},$$

(5. 54) entraîne la décomposition

(5. 57) $$E_{pq} = C + \sum_{s=1}^{\infty} B_s,$$

où $|C| = 0$.

Considérons maintenant un point $z_0 \in B_s$. Soit K un cercle de rayon $\leqq \frac{1}{2s}$ qui contient z_0 et désignons par K_0 le plus petit cercle ayant z_0 pour centre et contenant K. C'est évident que le rayon de K_0 ne dépasse pas $\frac{1}{s}$ et que $|K_0| \leqq 4|K|$. On a donc d'après (5. 56)

(5. 58) $$|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K| \leqq |\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K_0| < \frac{1}{8} |K_0| \leqq \frac{1}{2} |K|.$$

Soit $0 < r < \frac{1}{2s}$ et posons

$$M = \sup_{z \in B_s \cdot K(z_0, r)} f(z).$$

Choisissons une suite $\{z_k\}$ telle que

$$z_k \in B_s \cdot K(z_0, r), \quad f(z_k) \leqq f(z_{k+1}), \quad f(z_k) \to M,$$

en particulier, si $f(z)$ prend la valeur M sur l'ensemble $B_s \cdot K(z_0, r)$, soit $f(z_k) = M$. En posant

$$D_k = \underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_k)] \cdot B_s \cdot K(z_0, r),$$

on a donc

(5. 59) $$D_k \subset D_{k+1} \quad \text{et} \quad B_s \cdot K(z_0; r) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k,$$

de plus, en appliquant (5. 58) pour z_k au lieu de z_0 et pour $K(z_0, r)$ au lieu de K, il s'ensuit que

$$|D_k| \leqq \frac{1}{2} |K(z_0, r)|.$$

On conclut donc que, d'après (5. 59), l'inégalité

$$|B_s \cdot K(z_0, r)| = \lim |D_k| \leqq \frac{1}{2} |K(z_0, r)|$$

a lieu pour $0 < r < \frac{1}{2s}$, ce qui entraîne en vertu de (4. 1) que $|B_s| = 0$. Ceci prouve en faisant usage de (5. 57) et de (5. 44) que $|E| = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons encore que le théorème (5. 17) devient presque évident si l'on ne considère que des fonctions $f(z)$ mesurables. En ce cas, on peut même l'énoncer sous la forme suivante plus précise:

(5. 60) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres α, β $(\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi)$ tels que la fonction mesurable $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ en ce point, l'ensemble $f(E)$ est dénombrable.*

En effet, on a par hypothèse

$$|\underset{z}{E}[f(z) = f(z_0)]| > 0 \quad \text{pour} \quad z_0 \in E,$$

ce qui entraîne, $f(z)$ étant mesurable, la proposition.

Ouvrages cités.

[1] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable. (A paraître dans *Colloquium Math.*)

[2] A. Kolmogoroff et J. Vertchenko, Über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 1 (1934), 1—3, 105—107; Weitere Untersuchungen über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *ibid.* 4 (1934), 361—364.

[3] S. Saks, *Theory of the integral* (Warszawa—Lwów, 1937).

(Reçu le 19 janvier 1954)

On the functional equation of transitivity.

By MIKLÓS HOSSZÚ in Miskolc.

1. The operation $z = x * y$ defined on a set M $[x, y, z \in M]$ will be called *transitive*, if the equation

$$(x * t) * (y * t) = x * y \tag{1}$$

holds. If $x * y = F(x, y)$ is a function of two variables defined on the interval (a, b) of real numbers, with values in (a, b), then (1) takes the form

$$F[F(x, t), F(y, t)] = F(x, y). \tag{1'}$$

The functions $x - y$ and $\frac{x}{y}$ satisfy this equation, which gives thus a direct characterization of the inverse of the group operations without referring to the original operations.[1]) We shall see, that (1) implies the group properties of the inverse operation $x = z \circ y$ of $z = x * y$.[2])

A. R. SCHWEITZER[3]) has solved the functional equation (1′) by reducing it to a differential equation. J. ACZÉL has kindly called my attention to the problem of solving (1′) without supposing differentiability. In the sections 2, 3 of this paper I shall give the same solution of (1′), which A. R. SCHWEITZER has given, but supposing only that $F(x, y)$ is continuous and strictly monotonic. In the section 4 I shall consider the functional equation

$$F[G(x, t), H(y, t)] = K(x, y),$$

which is a generalization of (1′), and I shall solve it under suitable hypotheses of differentiability, by reducing it to a differential equation.

---

1) (*Added in proof:*) P. LORENZEN [Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen, *Journal reine angew. Math.*, **182** (1940), 50] has characterized the inverse of the group operations by (1) and by the solvability of the equation $x_0 * y = z$ for at least one x_0.

2) M. WARD [Postulates for the inverse operations in a group, *Transactions of the American Math. Soc.*, **32** (1930), 520—526] gave another elementary characterization by using other postulates instead of (1). He examined also the other inverse operation of $x * y$. It might be remarked that the characteristic properties of this second inverse and the postulates of M. WARD follow also from our investigations.

3) A. R. SCHWEITZER, On a functional equation, *Bulletin of the American Math. Soc.*, **18** (1912), 160—161, 299—302; On the iterative properties of an abstract group, *ibidem*, **24** (1918), 371.

2. First we examine some algebraic properties of the transitive operations.

Theorem I. *Let $z = x * y$ be an operation defined on the set M $[x, y, z \in M]$, suppose it is transitive [cf. (1)], and that the cancellation law holds:*

$$x * y_1 = x * y_2 \quad \textit{for all} \quad x \in M \quad \textit{implies} \quad y_1 = y_2. \tag{2}$$

Then there exists in M a right-hand unit, i. e. an element $e \in M$ such that

$$x * e = x \tag{3}$$

for all $x \in M$, and the operation is an involution, i. e. for any $x \in M$

$$x * x = e \tag{4}$$

holds. Moreover, the operation $z = x * y$ has an inverse operation $x = z \circ y$, and this satisfies the group-axioms.

Proof. *a*) First we show (3). Let $x = x_0$ be an arbitrary constant. We define $e = x_0 * x_0$. Putting $x = y = t = x_0$ in (1), we see that e is idempotent:

$$e * e = e.$$

Now let us put $x = t = e$ in (1), then we get

$$e * y = (e * e) * (y * e) = e * (y * e),$$

whence making use of (2), we get

$$y * e = y$$

for any y, and this is (3). (2) involves the unicity of e, since

$$x * e = x = x * e'$$

implies $e = e'$.

b) In order to prove (4), we choose $t = y = x$ in (1); so we get

$$(x * x) * (x * x) = x * x = e_x.$$

Consequently,

$$e_x * e_x = e_x.$$

On the other hand, by (3),

$$e_x * e = e_x,$$

hence by (2) we get $e_x = e$. This proves (4).

We remark that e is no left-hand unit, since putting $t = x$ in (1), we get

$$(x * x) * (y * x) = x * y;$$

i. e., by (4),

$$e * (y * x) = x * y \tag{5}$$

and in general $x * y \neq y * x$.

c) Now we show that the operation

$$z \circ y = z * (e * y) \tag{6}$$

is the inverse of the operation $z=x*y$. Indeed, it follows from (1) and (3) that

(6′) $$z\circ y=(x*y)*(e*y)=x*e=x.$$

d) We prove that the operation defined by (6) is a group operation. Since obviously $z\circ y\in M$, we have only to show that

(α) $$x\circ(y\circ t)=(x\circ y)\circ t;$$

(β) there exists a left unit $e\in M$, i. e. $e\circ a=a$ for any $a\in M$;

(γ) there exists for any $a\in M$ a left inverse $x=a^{-1}\in M$, i. e. a solution of the equation $x\circ a=e$.

In order to prove (β) and (γ), we observe that

(δ) the equation $x\circ a=b$ can be solved for arbitrary $a,b\in M$, and the solution is $x=b*a$.

This follows from (6′).

(δ) and (4) imply (β), for (δ) gives, putting $b=a$,

$$x=a*a=e,$$

which satisfies (β).

Further, putting $b=e$, (δ) gives

$$x=a^{-1}=e*a,$$

which satisfies the condition (γ).

Finally we verify the equation

$$x*\{e*[y*(e*t)]\}=(x\circ y)*(e*t),$$

which, on account of (6), is equivalent to (α) for arbitrary $x,y,t\in M$.

Denoting here $x\circ y$ by u and $e*t$ by v, and using (δ) we get $x=u*y$, and we have to prove that

$$(u*y)*[e*(y*v)]=u*v.$$

But

(5) $$e*(y*v)=v*y$$

reduces the required equation to (1), which completes the proof of theorem I.

Remark. Theorem I can be inverted as follows:

The inverse operation $z=x*y=x\circ y^{-1}$ of a group operation $x=z\circ y$ defined on a set M is transitive and also (2), (3) *and* (4) *hold.*

(2), (3) and (4) hold evidently. We have only to verify (1) or the equivalent equation

$$(x\circ t^{-1})\circ(y\circ t^{-1})^{-1}=x\circ y^{-1},$$

or, what is the same,

$$x\circ t^{-1}=(x\circ y^{-1})\circ(y\circ t^{-1}).$$

But here, by (α), (γ) and (β), we have

$$(x\circ y^{-1})\circ(y\circ t^{-1})=[(x\circ y^{-1})\circ y]\circ t^{-1}=[x\circ(y^{-1}\circ y)]\circ t^{-1}=(x\circ e)\circ t^{-1}=x\circ t^{-1}$$

thus our statement is proved.

3. L. E. J. Brouwer[4]) has proved the following theorem:

All one-dimensional continuous groups are isomorphic to the addition group of real numbers, i. e. the group operation has the form

$$z \circ y = f^{-1}[f(z)+f(y)] \qquad (\text{"quasi addition"}),$$

where $f(t)$ is an arbitrary continuous, strictly monotonic function with $f(e)=0$ (e denotes the unit element) and $f^{-1}(\tau)$ is its inverse function[5]).

Making use of this theorem and our theorem I, we obtain the following

Theorem II. *In order that the continuous and strictly monotonic function $F(x, y)$ defined on the interval (a, b) of real numbers be transitive, i. e. satisfy the functional equation*

$$(1') \qquad F[F(x,t), F(y,t)] = F(x,y) \qquad [x, y, t, F \in (a,b)],$$

it is necessary and sufficient, that $F(x, y)$ should be written in the form

$$(7) \qquad F(x,y) = f^{-1}[f(x)-f(y)] \qquad (\text{"quasi difference"}),$$

where $f(x)$ is an arbitrary continuous and strictly monotonic function with $f(e)=0$.

The conditions of theorem I are fulfilled since, $F(x, y)$ being strictly monotonic,

$$(2') \qquad F(x, y_1) = F(x, y_2) \quad \text{for all} \quad x \in M \quad \text{implies} \quad y_1 = y_2.$$

Remark. A direct proof of theorem II can be obtained by the following recursive construction of $\varphi(t) = f^{-1}(t)$:

a) $\varphi(1) = c$ is arbitrary $(a \leqq c \leqq b)$;

b) if $\varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ is already defined for an integer $n \geqq 1$, then $\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ is defined by the equation

$$F\left[\varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right] = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right);$$

c) if $\varphi\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)$ is already defined for two integers n, k with $n \geqq 1$, $k \geqq 1$, then $\varphi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ is defined by the equation

$$F\left[\varphi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)\right] = \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

---

[4]) L. E. J. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, *Math. Annalen*, 67 (1909), 246—267.

[5]) In the following we denote the inverse of any strictly monotonic, continuous function $f(t)$ by $f^{-1}(t)$.

and conversely, if $\varphi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ is already defined for integer $n \geqq 1$ and $k<1$, then $\varphi\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)$ is defined by the same equation.

Thus $\varphi(t)$ will be defined by induction for all dyadically rational values of t. The functional equation

$$F[\varphi(t), \varphi(\tau)] = \varphi(t-\tau) \tag{7'}$$

is then satisfied for dyadically rational t, τ. We define $\varphi(t)$ for arbitrary values of t as

$$\varphi(t) = \lim_{t_\nu \to t} \varphi(t_\nu)$$

where $\{t_\nu\}$ is a sequence of dyadically rational values tending to t and thus we see that the same equation (7') is also satisfied for arbitrary t, τ.

Finally we get (7) by writing $t=f(x)$ and $\tau=f(y)$.

We omit the further details of this direct proof.[6]

4. We turn to the generalization of (1').

Theorem III. *All strictly monotonic and continuously differentiable solutions of the functional equation*

$$F[G(x,t), H(y,t)] = K(x,y) \tag{8}$$

can be written in the form

$$\begin{cases} F(x,y) = h[\varphi(x)-\psi(y)], \\ K(x,y) = h[f(x)-g(y)], \\ G(x,y) = \varphi^{-1}[f(x)-k(y)], \\ H(x,y) = \psi^{-1}[g(x)-k(y)] \end{cases} \tag{9}$$

where $h(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $k(t)$ are arbitrary strictly monotonic functions with continuous derivatives.

Proof. Differentiating (8) with respect to the variable t we get

$$F_1[G(x,t), H(y,t)]\, G_2(x,t) + F_2[G(x,t), H(y,t)]\, H_2(y,t) = 0$$

where the indices 1 and 2 denote the partial differential quotient with respect to the first and second variable, respectively.

Now, choosing arbitrarily a value t_0 of t, we define the functions $\varphi(u)$ and $\psi(u)$ by the equations

$$\varphi'[G(x,t_0)] = G_2(x,t_0), \quad \psi'[H(y,t_0)] = H_2(y,t_0),$$

then by writing x for $G(x,t_0)$ and y for $H(y,t_0)$ we get

$$F_1(x,y)\,\varphi'(x) + F_2(x,y)\,\psi'(y) = 0,$$

---

[6]) We do not treat, for exemple, the existence of $\lim_{t_\nu \to t} \varphi(t_\nu)$ and the solvability of the equations $F(x,y)=z_0$ and $F(x_0,y)=y$, which were used at the recursive definition of $\varphi(t)$ in *b*), *c*).

i. e. the Jacobian of $F(x, y)$ and $\varphi(x)-\psi(y)$ is equal to 0. Thus the functions $F(x, y)$ and $\varphi(x)-\psi(y)$ are dependent:

$$F(x, y)=h[\varphi(x)-\psi(y)].$$

Substituting this into (8) we get

$$h\{\varphi[G(x, t)]-\psi[H(y, t)]\}=K(x, y), \tag{10}$$

and putting

$$f(x)=\varphi[G(x, t_0)], \quad g(y)=\psi[H(y, t_0)]$$

we arrive to the relation

$$K(x, y)=h[f(x)-g(y)].$$

Further we use the notations

$$r(x)=h^{-1}[K(x, y_0)], \quad s(t)=\psi[H(y_0, t)],$$
$$\varrho(y)=-h^{-1}[K(x_0, y)], \quad \sigma(t)=\varphi[G(x_0, t)].$$

For $y=y_0$ resp. $x=x_0$ (10) gives

$$\varphi[G(x, t)]=r(x)+s(t),$$
$$\psi[H(y, t)]=\varrho(y)+\sigma(t),$$

respectively.

If we put our results into (8), we obtain

$$h[r(x)+s(t)-\varrho(y)-\sigma(t)]=h[f(x)-g(y)],$$

hence the solution satisfies (8) only if

$$r(x)=f(x)+c_1, \ \varrho(y)=g(y)+c_2, \ \sigma(t)=s(t)+c_3$$

hold with $c_1=c_2+c_3$. Denoting here

$$-k(t)=s(t)+c_1=\sigma(t)+c_2$$

we see that

$$G(x, y)=\varphi^{-1}[f(x)-k(y)], \quad H(x, y)=\psi^{-1}[g(x)-k(y)],$$

and this completes the solution (9).

To complete the proof of the theorem III we have only to observe that the functions (9) satisfy the equation (8).

(Received December 6, 1953.)

Eine Formel für gewisse symmetrische Polynome.

Von ALFRED STÖHR in Göttingen.

$x_1, x_2, \ldots$ seien Unbestimmte; alle anderen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen nichtnegative ganze Zahlen. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ seien fest gewählt. Der Quotient der Determinante

$$D = |x_r^{a_1}\, x_r^{a_2} \ldots x_r^{a_n}| \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

und des Differenzenprodukts

$$\Delta = \prod_{1 \leqq l < k \leqq n} (x_k - x_l)$$

ist offenbar eine ganze rationale symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$; es sei die Aufgabe gestellt, diese durch die elementarsymmetrischen Funktionen auszudrücken. Sei $\sigma_0 = 1$ und sei σ_i für $1 \leqq i \leqq n$ die elementarsymmetrische Funktion i-ten Grades von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sei $m \geqq 1$ und $m \geqq a_n - n + 1$. Die Zahlen $b_1 < b_2 \ldots < b_m$ seien so bestimmt, daß $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ eine Permutation der Zahlen $0, 1, \ldots, n+m-1$ ist. Wir behaupten, daß die folgende Formel gilt:

$$D/\Delta = \sum{}' \operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m)\, \sigma_{n+c_1-b_1}\, \sigma_{n+c_2-b_2} \ldots \sigma_{n+c_m-b_m}.^{1)}$$

Σ' bedeutet dabei, daß über alle diejenigen Permutationen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ summiert wird, die für $i = 1, 2, \ldots, m$ die Ungleichungen $0 \leqq b_i - c_i \leqq n$ erfüllen, und $\operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ bedeutet das Vorzeichen der betreffenden Permutation.

---

1) Diese Formel verallgemeinert eine Aufgabe aus G. PÓLYA und G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925), Bd. 2, Abschn. VII, Nr. 10, Seite 99 und 302; ebendort (Abschn. V, Nr. 48, Seite 45 und 229) befindet sich eine Aufgabe über das Vorzeichen der Determinante D. Von A. OSTROWSKI und N. G. TSCHEBOTAREFF stammt der Satz, daß D nicht verschwindet, wenn die x_r paarweise verschiedene q-te Einheitswurzeln sind (q Primzahl und $> a_n$), vgl. A. OSTROWSKI, Über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteten Potenzreihen, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigung*, **35** (1926) 269—280, insbesondere S. 274—277.

B e w e i s. In der folgenden Determinante durchlaufe der Index r die Werte $1, 2, \ldots, n+m$. Es ist

$$\frac{1}{\Delta}\,|\,1\; x_r\; x_r^2 \ldots x_r^{n+m-1}\,| = \frac{1}{\Delta} \prod_{1 \leqq l < k \leqq n+m} (x_k - x_l) =$$

$$= \left(\frac{1}{\Delta} \prod_{1 \leqq l < k \leqq n} (x_k - x_l)\right) \cdot \left(\prod_{n+1 \leqq l < k \leqq n+m} (x_k - x_l)\right) \cdot \left(\prod_{k=n+1}^{n+m} \prod_{l=1}^{n} (x_k - x_l)\right) =$$

$$= 1 \cdot \sum \operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m)\, x_{n+1}^{c_1} x_{n+2}^{c_2} \ldots x_{n+m}^{c_m} \cdot \prod_{k=n+1}^{n+m} (\sigma_0 x_k^n - \sigma_1 x_k^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n);$$

dabei wird über alle Permutationen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ summiert. Faßt man die linke und rechte Seite der Gleichung als Funktion von $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ auf (mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Parametern), so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten von $x_{n+1}^{b_1}\, x_{n+2}^{b_2} \ldots x_{n+m}^{b_m}$:

$$\operatorname{sgn}(a_1, a_2, \ldots, a_n,\, b_1, b_2, \ldots, b_m) \cdot D/\Delta =$$

$$= \sum{}' \operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m) \prod_{i=1}^{m} (-1)^{n+c_i-b_i}\, \sigma_{n+c_i-b_i},$$

wo $\operatorname{sgn}(a_1, a_2, \ldots, a_n,\, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ das Vorzeichen derjenigen Permutation ist, die $0, 1, \ldots, n+m-1$ in $a_1, a_2, \ldots, a_n,\, b_1, b_2, \ldots, b_m$ überführt. Die Behauptung ist also bewiesen, wenn

$$(*) \qquad \operatorname{sgn}(a_1, a_2, \ldots, a_n,\, b_1, b_2, \ldots, b_m) \prod_{i=1}^{m} (-1)^{n+c_i-b_i} = +1$$

gezeigt ist.

Indem man in der Reihe $0, 1, \ldots, n+m-1$ nacheinander für $i = 1, 2, \ldots, n$ jeweils a_i mit allen denjenigen kleineren Zahlen vertauscht, die von $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ verschieden sind, hat man insgesamt $\sum_{i=1}^{n} (a_i - i + 1)$ solche Vertauschungen auszuführen, und die Reihe $0, 1, \ldots, n+m-1$ wird dadurch in $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ übergeführt. Also ist die linke Seite von (*) gleich

$$(-1)^{\sum_{i=1}^{n} (a_i - i + 1) + \sum_{i=1}^{m} (n + c_i - b_i)}.$$

Der Exponent ist gerade, denn mod 2 ist

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - i + 1) + \sum_{i=1}^{m} (n + c_i - b_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{i=1}^{n} (i-1) + mn + \sum_{i=1}^{m} c_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i + mn + \sum_{i=0}^{m-1} i = (n+m)(n+m-1) \equiv 0.$$

(Eingegangen am 5. März 1954.)

On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics.

By E. EGERVÁRY in Budapest.

Notations.

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ = matrix composed of the scalars a_{ij}

$[\mathbf{A}_{ij}]$ = hypermatrix composed of the blocks $\mathbf{A}_{ij}$

$\mathbf{A}^*$ = conjugate transpose of $\mathbf{A}$

$\mathbf{a}, \mathbf{a}_i, \ldots$ = column vectors

$\mathbf{b}^*, \mathbf{b}^j, \ldots$ = row vectors

$[\mathbf{a}_i \mathbf{b}^j]$ = hypermatrix composed of the blocks $\mathbf{a}_i \mathbf{b}^j$

$\mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} = [\mathbf{A}\, b_{ij}]$; $[b_{ij}] = \mathbf{B}$

$\langle a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ = diagonal matrix

$\mathbf{E}_n$ = n-th order unit matrix

$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A}$ = determinant of $\mathbf{A}$

1. Introduction. It is known that the operational rules for hypermatrices composed of quadratic blocks and those for ordinary matrices composed of scalar elements nearly agree, the only difference between them being that the blocks are in general non-commutable. Therefore it is to be expected that concepts and computational methods referring to ordinary matrices can be extended to hypermatrices whose blocks are commutable in pairs.

The assumption of the commutability obviously implies that the blocks constitute a commutative ring, consequently rational scalar identities remain valid if the scalar indeterminates will be replaced by the blocks.

This observation suggests that the concepts determinant, minor, adjoint can be extended to hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and that in this way certain rational operations with nm-th order matrices can be reduced to manipulation with n-th and m-th order matrices only.

Concerning the spectral decomposition of a hypermatrix composed of commutable blocks the following theorems are known.

The characteristic roots of the direct product $\mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B}$ are the $n \cdot m$ products $a_i b_j$ of a characteristic root of $\mathbf{A}$ by one of $\mathbf{B}$. This is a special case of the following theorem of WILLIAMSON[1]): If the n^2 blocks $f_{ij}(\mathbf{A})$ of a

[1]) J. WILLIAMSON, The latent roots of a matrix of special type, *Bulletin American Math. Soc.*, **37** (1931), 585—590.

hypermatrix are arbitrary polynomials of the same matrix $\mathbf{A}$ and if $\mathbf{A}$ has the characteristic roots $a_1, a_2, \ldots, a_m$, then the characteristic roots of the hypermatrix $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ are the $n \cdot m$ characteristic roots of the matrices

$$[f_{ij}(a_1)], [f_{ij}(a_2)], \ldots, [f_{ij}(a_m)].$$

These theorems suggest that not only the characteristic roots but the characteristic vectors too, hence the whole spectral decomposition of the hypermatrix $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ can be built up from those of certain n-th resp. m-th order matrices by explicit and elementary operations.

2. Theorems. Both suggestions turn out to be justified and the main object of this paper will be the proof, discussion and application of the following two theorems.

Theorem. A. *If the m-th order blocks* $\mathbf{A}_{ij}$ *of the hypermatrix* $[\mathbf{A}_{ij}]$ *are commutable in pairs, then the determinant, resp. the adjoint of* $[\mathbf{A}_{ij}]$, *are given by the following formulae*

$$\det[\mathbf{A}_{ij}] = \det(\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}]), \tag{1}$$

$$\operatorname{adj}[\mathbf{A}_{ij}] = \mathbf{adj}\,[\mathbf{A}_{ij}] \cdot \{\operatorname{adj}(\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}]) \cdot \times \mathbf{E}_n\}, \tag{2}$$

where

$$\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}] = \sum_{(\nu)} \pm \mathbf{A}_{1\nu_1}\mathbf{A}_{2\nu_2}\ldots\mathbf{A}_{n\nu_n}$$

and $\mathbf{adj}\,[\mathbf{A}_{ij}]$ *denotes a hypermatrix whose blocks depend in the same way upon the blocks* $\mathbf{A}_{ij}$, *as the elements of an ordinary adjoint* $\operatorname{adj}[a_{ij}]$ *depend upon the scalar elements* a_{ij}.

Theorem B. *If* $\mathbf{A}$ *is a (hermitical) symmetrical m-th order matrix with the characteristic roots* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *and if* $f_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *are arbitrary polynomials of the real variable x, subject only to the restriction* $f_{ji}(x) = \overline{f_{ij}(x)}$, *then the spectral decomposition of the hypermatrix* $[\mathbf{A}_{ij}]$ *with the blocks* $\mathbf{A}_{ij} = f_{ij}(\mathbf{A})$ *is given by*

$$[\mathbf{A}_{ij}] = \mathbf{T}^* \langle \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}, \ldots, \lambda_{m1}, \ldots, \lambda_{mn} \rangle \mathbf{T}, \quad \mathbf{T}^*\mathbf{T} = \mathbf{E}_{mn}, \tag{3}$$

where the characteristic roots λ_{ij} *and the factors of the transforming matrix*

$$\mathbf{T} = \langle \overbrace{\mathbf{U}, \mathbf{U}, \ldots, \mathbf{U}}^{n} \rangle \mathbf{P} \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_n \rangle \tag{3. 1}$$

are to be found from the spectral decompositions

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \langle a_1, \ldots, a_m \rangle \mathbf{U}^*, \quad [f_{ij}(a_k)] = \mathbf{V}_k \langle \lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{kn} \rangle \mathbf{V}_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{3. 2}$$

and $\mathbf{P}$ *is the permutation matrix which transforms the sequence of ordered pairs*

$$(11)(12)\ldots(1m)(21)(22)\ldots(2m)\ldots(n1)(n2)\ldots(nm)$$

into the sequence

$$(11)(21)\ldots(n1)(12)(22)\ldots(n2)\ldots(1m)(2m)\ldots(nm).$$

The caracteristic vectors of $[\mathbf{A}_{ij}]$ are then the columns of $\mathbf{T}$.

The special case of Theorem B concerning the direct product $\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}$ of the symmetrical matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ seems worth to be formulated explicitely as

Corollary I. *The characteristic roots of* $\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}$ *are the products* $a_i b_j$ *of the characteristic roots of* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$, *and the characteristic vectors of* $\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}$ *are the direct products* $\mathbf{u}_i\cdot\times\mathbf{v}_j$[2]) *of the characteristic vectors of* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$.

According to a theorem of STÉPHANOS[3]) the characteristic roots of the nm-th order hypermatrix $\sum\limits_p\sum\limits_q c_{pq}\mathbf{A}^p\cdot\times\mathbf{B}^q$ are the nm numbers $\sum\limits_p\sum\limits_q a_i^p b_j^q$, where the a_i's are the characteristic roots of $\mathbf{A}$ and the b_j's are the characteristic roots of $\mathbf{B}$.

By means of Theorem B STÉPHANOS' theorem can be easily completed as follows:

Corollary II. *If* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *are symmetrical with the spectral decompositions*

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\langle a_1,\ldots,a_m\rangle\mathbf{U}^*=\sum_k a_k\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*,\quad \mathbf{U}\mathbf{U}^*=\mathbf{E}_m, \tag{4. 1}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\mathbf{V}^*=\sum_h b_h\mathbf{v}_h\mathbf{v}_h^*,\quad \mathbf{V}\mathbf{V}^*=\mathbf{E}_n, \tag{4. 2}$$

then the spectral decomposition of $\sum\limits_p\sum\limits_q c_{pq}\mathbf{A}^p\cdot\times\mathbf{B}^q$ *is given by*

$$\sum_i\sum_j(\mathbf{u}_i\cdot\times\mathbf{v}_j)\Big(\sum_p\sum_q c_{pq}a_i^p b_j^q\Big)(\mathbf{u}_i^*\cdot\times\mathbf{v}_j^*). \tag{4}$$

3. Determinant of a hypermatrix. Let be given an nm-th order hypermatrix $[\mathbf{A}_{ii}]$ whose m-th order blocks $\mathbf{A}_{ij}$ are commutable in pairs. Suppose preliminarily that the hypermatrices

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1k}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2k}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \mathbf{A}_{k1} & \mathbf{A}_{k2} & \ldots & \mathbf{A}_{kk}\end{bmatrix}\qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \tag{5}$$

are invertable.

[2]) In agreement with the general definition we designate by $\mathbf{u}\cdot\times\mathbf{v}$ the vector

$$\mathbf{u}\cdot\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\times\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}v_1\\ \mathbf{u}v_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}v_n\end{bmatrix}.$$

[3]) C. STÉPHANOS, Sur une extension du calcul des substitutions linéaires, *Journal math. pures et appliquées*, (5) 6 (1900), 73—126.

Then, replacing in the known scalar identity[4])

$$
(6)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2/D_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D_n/D_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},
$$

where

$$
D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0; \quad b_{ik} = D_k^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,k} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{vmatrix};
$$

$$
c_{kj} = D_k^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k,k-1} & a_{kj} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),
$$

the scalar indeterminates a_{ij} by the commutable blocks $\mathbf{A}_{ij}$ and taking determinants on both sides, we get immediately

$$
(7)\qquad \det \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} = \det \Big(\sum_{(\nu)} \pm \mathbf{A}_{1\nu_1} \mathbf{A}_{2\nu_2} \dots \mathbf{A}_{n\nu_n}\Big).
$$

Thus we have proved formula (1) of our Theorem A under the restrictive conditions (5), but it is easy to see for reasons of continuity that it holds in the general case too.

Introducing the term "hyperdeterminant" for

$$
\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}] = \sum_{(\nu)} \pm \mathbf{A}_{1\nu_1} \mathbf{A}_{2\nu_2} \dots \mathbf{A}_{n\nu_n}
$$

we can formulate the following theorem.

If the blocks of a hypermatrix are commutable in pairs, then the determinant of the hypermatrix is equal to the (ordinary) determinant of the hyperdeterminant of the blocks.

Obviously this theorem reduces the computation of an mn-th order determinant to that of an n-th order determinant.

4. Adjoint of a hypermatrix. Attempting to find a similar method for the computation of the adjoint, at first sight it is not easy to see, how to utilize the commutability of the blocks, because the formation of a minor i. e. the deleting of a row and of a column destroys the partitioned structure of the hypermatrix. Nevertheless a very simple idea will enable us

[4]) See e. g. Ф. Я. Гантмахер, Теория матриц (Москва, 1953), p. 39.

to find a convenient method, namely, one must not endeavour to calculate a single element of the adjoint, but one has to find a whole block of it at once.

To this end, we introduce the concept of the "hyperadjoint" $\mathbf{adj}\,[\mathbf{A}_{ij}]$ of the given hypermatrix $[\mathbf{A}_{ij}]$ composed of commutable blocks. It is a hypermatrix of the same order as $[\mathbf{A}_{ij}]$, whose blocks depend in the same way upon the blocks $\mathbf{A}_{ij}$ as the elements of the ordinary adjoint depend upon the scalar elements of an ordinary matrix.

According to this definition the hyperadjoint satisfies the identity

$$(8)\qquad [\mathbf{A}_{ij}]\,\mathbf{adj}\,[\mathbf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}] & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}] \end{bmatrix},$$

hence it is obvious that in order to have the adjoint of $[\mathbf{A}_{ij}]$ one has only to multiply from the right both sides of the equation (8) by a diagonal hypermatrix all of whose diagonal elements are equal to $\operatorname{adj}\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}]$. We have indeed

$$\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}]\cdot \operatorname{adj}\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}] = \det\,[\mathbf{A}_{ij}]\cdot\mathbf{E}_m,$$

$$[\mathbf{A}_{ij}]\cdot\{\mathbf{adj}\,[\mathbf{A}_{ij}]\cdot \operatorname{adj}\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}]\cdot\times\mathbf{E}_n)\} = \det\,[\mathbf{A}_{ij}]\cdot\mathbf{E}_{mn}.$$

Thus the adjoint of $[\mathbf{A}_{ij}]$ is equal to the matrix in brackets { }, and so formula (2) of our Theorem A is proved.

This result can be formulated as follows:

In order to find the adjoint of a hypermatrix whose blocks are commutable, one has to multiply each block of the hyperadjoint $\mathbf{adj}\,[\mathbf{A}_{ij}]$ *by* $\operatorname{adj}\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}]$.

In this way the computation of the adjoint of an mn-th order hypermatrix, whose blocks are commutable, is reduced to operations with n-th order and m-th order matrices.

If the hypermatrix $[\mathbf{A}_{ij}]$ is non-singular then the expression (2) of the adjoint furnishes the following formula for the inverse of $[\mathbf{A}_{ij}]$

$$(9)\qquad [\mathbf{A}_{ij}]^{-1} = \mathbf{adj}\,[\mathbf{A}_{ij}]\,(\mathbf{det}\,[\mathbf{A}_{ij}]\cdot\times\mathbf{E}_n)^{-1}.$$

5. Special cases. The direct product of two quadratical matrices

$$\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}b_{11} & \mathbf{A}b_{12} & \dots & \mathbf{A}b_{1n} \\ \mathbf{A}b_{21} & \mathbf{A}b_{22} & \dots & \mathbf{A}b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{A}b_{n1} & \mathbf{A}b_{n2} & \dots & \mathbf{A}b_{nn} \end{bmatrix}$$

is the simplest instance of a hypermatrix whose blocks are commutable in pairs. Thus the properties of the direct product must be consequences of the theorems wich we proved above.

Indeed, application of (8) gives immediately

$$\det(\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}) = \det\,[\mathbf{A}b_{ij}] = \det(\mathbf{det}[\mathbf{A}b_{ij}]) = \det(\mathbf{A}^n|\mathbf{B}|) = |\mathbf{A}|^n\cdot|\mathbf{B}|^m.$$

Further, denoting the cofactor of b_{ij} by B_{ij}, we have from (9)

$$(\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{adj}\,[\mathbf{A}b_{ij}]\,(\mathbf{det}\,[\mathbf{A}b_{ij}]\cdot\times\mathbf{E}_n)^{-1} =$$

$$= [\mathbf{A}^{n-1}B_{ji}]\,|\mathbf{B}|^{-1}(\mathbf{A}^{-n}\cdot\times\mathbf{E}_n) = \left[\mathbf{A}^{-1}\frac{B_{ji}}{|\mathbf{B}|}\right] = \mathbf{A}^{-1}\cdot\times\mathbf{B}^{-1}.$$

W. VOIGT[5]) investigated the $2n$-th order hypermatrix $[\mathbf{A}_{ij}]$ where

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} b_{ij} & c_{ij} \\ -c_{ij} & b_{ij} \end{bmatrix} \qquad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

and proved that the determinant of this hypermatrix is equal to the sum of two squares. VOIGT's theorem is an immediate consequence of our Theorem A, because the second-order blocks $\mathbf{A}_{ij}$ are skew-cyclic, hence commutable in pairs. Thus we have

$$\det[\mathbf{A}_{ij}] = \det\sum_{(\nu)}\pm\begin{bmatrix} b_{1\nu_1} & c_{1\nu_1} \\ -c_{1\nu_1} & b_{1\nu_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{2\nu_2} & c_{2\nu_2} \\ -c_{2\nu_2} & b_{2\nu_2} \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} b_{n\nu_n} & c_{n\nu_n} \\ -c_{n\nu_n} & b_{n\nu_n} \end{bmatrix}.$$

But sum and product of skew-cyclic matrices is again skew-cyclic, therefore

$$\det[\mathbf{A}_{ij}] = \det\begin{bmatrix} B & C \\ -C & B \end{bmatrix} = B^2 + C^2$$

where B and C are rational integral functions of the elements b_{ij}, c_{ij}. Q. e. d.

6. Permutation matrix. We introduce a particular hypermatrix which we shall use several times in the subsequent sections. Let

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} (1 \\ \\ \\ (i \\ \\ \\ (m \end{matrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} (1 \\ \\ \\ (j \\ \\ \\ (n \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} j=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n \end{pmatrix}$$

be m-th resp. n-th order unit vectors and form the mn-th order quadratical hypermatrix

$$(10) \qquad \mathbf{P} = [\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\mathbf{f}_1^* & \mathbf{e}_2\mathbf{f}_1^* & \ldots & \mathbf{e}_m\mathbf{f}_1^* \\ \mathbf{e}_1\mathbf{f}_2^* & \mathbf{e}_2\mathbf{f}_2^* & \ldots & \mathbf{e}_m\mathbf{f}_2^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{e}_1\mathbf{f}_n^* & \mathbf{e}_2\mathbf{f}_n^* & \ldots & \mathbf{e}_m\mathbf{f}_n^* \end{bmatrix}.$$

The blocks of $\mathbf{P}$ and $\mathbf{P}^*$ are conformable and we have

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^* = \mathbf{E}_{mn}$$

i. e. $\mathbf{P}$ is orthogonal. Furthermore it is easy to see that multiplication of the

[5]) W. VOIGT, Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätskonstanten von Krystallen, *Wiedemanns Annalen Phys. Chem.*, 16 (1882), 273—321.

sequence (as a row-vector)

$$(11)(12)\dots(1n);\ (21)(22)\dots(2n);\ \dots;\ (m1)(m2)\dots(mn)$$

by $\mathbf{P}$ transforms it into

$$(11)(21)\dots(m1);\ (12)(22)\dots(m2);\ \dots;\ (1n)(2n)\dots(mn)$$

We will prove the relation

$$\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}=\mathbf{P}(\mathbf{A}\times\cdot\mathbf{B})\mathbf{P}^{*} \tag{11}$$

which expresses that the left and right direct products of the same square matrices are orthogonally similar. To this end partition $\mathbf{A}$ in columns, $\mathbf{B}$ in rows:

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_m],\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}^n\end{bmatrix},$$

and consider the mn-th order square hypermatrix

$$[\mathbf{a}_i\mathbf{b}^j]=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}^1 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}^1\\ \mathbf{a}_1\mathbf{b}^2 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}^2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a}_1\mathbf{b}^n & \mathbf{a}_2\mathbf{b}^n & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}^n\end{bmatrix}.$$

Multiplication of this matrix by $\mathbf{P}^{*}$ gives

$$[\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j]\cdot\mathbf{P}^{*}=[\mathbf{a}_i\mathbf{b}^j][\mathbf{f}_k\mathbf{e}_l^{*}]=[\sum_{\nu}\mathbf{a}_\nu\mathbf{b}^j\mathbf{f}_k\mathbf{e}_\nu^{*}]=[b_{jk}\sum_{\nu}\mathbf{a}_\nu\mathbf{e}_\nu^{*}]=[b_{jk}\mathbf{A}]=\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B},$$

and similarly

$$\mathbf{P}^{*}[\mathbf{a}_i\mathbf{b}^j]=\mathbf{A}\times\cdot\mathbf{B}.$$

Hence

$$\mathbf{P}^{*}[\mathbf{a}_i\mathbf{b}^j]\mathbf{P}^{*}=(\mathbf{A}\times\cdot\mathbf{B})\mathbf{P}^{*}=\mathbf{P}^{*}(\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B})$$

or

$$\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}=\mathbf{P}(\mathbf{A}\times\cdot\mathbf{B})\mathbf{P}^{*}.$$ Q. e. d.

7. Spectral decomposition of a symmetrical hypermatrix. We suppose from now on that the blocks $\mathbf{A}_{ij}$ have the form $\mathbf{A}_{ij}=f_{ij}(\mathbf{A})$, where $\mathbf{A}$ is an m-th order symmetrical matrix and $f_{ij}(x)$ are arbitrary polynomials of the real variable x subject only to the restriction $f_{ji}(x)\equiv\overline{f_{ij}(x)}$.

We write the spectral decomposition of a polynomial $f(\mathbf{A})$ of the symmetrical matrix $\mathbf{A}$ in the following form

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{U}\langle f(a_k)\rangle\mathbf{U}^{*}=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_m]\langle f(a_1),f(a_2),\dots,f(a_m)\rangle\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^{*}\\ \mathbf{u}_2^{*}\\ \vdots\\ \mathbf{u}_m^{*}\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_k f(a_k)\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^{*} \tag{12}$$

or

$$\mathbf{U}^{*}f(\mathbf{A})\mathbf{U}=\langle f(a_1),f(a_2),\dots,f(a_m)\rangle;\quad \mathbf{U}\mathbf{U}^{*}=\mathbf{E}_m. \tag{12. 1}$$

Here $a_1, a_2, \ldots, a_m$ are the (real) characteristic roots and $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ the characteristic vectors of $\mathbf{A}$.

Transform now the given hypermatrix $[\mathbf{A}_{ij}] = [f_{ij}(\mathbf{A})]$ as follows:

$$(\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_n)[f_{ij}(\mathbf{A})](\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{U}^* & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{U}^* & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{A}) & f_{12}(\mathbf{A}) & \ldots & f_{1n}(\mathbf{A}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(\mathbf{A}) & f_{n2}(\mathbf{A}) & \ldots & f_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{U} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{U} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \langle f_{11}(a_k) \rangle & \langle f_{12}(a_k) \rangle & \ldots & \langle f_{1n}(a_k) \rangle \\ \langle f_{21}(a_k) \rangle & \langle f_{22}(a_k) \rangle & \ldots & \langle f_{2n}(a_k) \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle f_{n1}(a_k) \rangle & \langle f_{n2}(a_k) \rangle & \ldots & \langle f_{nn}(a_k) \rangle \end{bmatrix}.$$

Using the permutation matrix $\mathbf{P}$ we get from here

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_n)[f_{ij}(\mathbf{A})](\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_n)\mathbf{P} =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} f_{11}(a_1) & \ldots & f_{n1}(a_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1n}(a_1) & \ldots & f_{nn}(a_1) \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} f_{11}(a_m) & \ldots & f_{n1}(a_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(a_m) & \ldots & f_{nn}(a_m) \end{bmatrix} \right\rangle.$$

In consequence of our assumption $f_{ji} \equiv \overline{f_{ij}}$ each diagonal block on the right is symmetrical, therefore each block $[f_{ij}(a_k)]$ can be diagonalized by the aid of an orthogonal matrix $\mathbf{V}_k$ in the form

$$\text{(12.2)} \qquad \mathbf{V}_k^* \begin{bmatrix} f_{11}(a_k) & \ldots & f_{1n}(a_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(a_k) & \ldots & f_{nn}(a_k) \end{bmatrix} \mathbf{V}_k = \langle \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \ldots, \lambda_{kn} \rangle.$$

Thus the spectral decomposition of $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ is given by the equation

$$\text{(12.21)} \qquad \mathbf{T}^*[f_{ij}(\mathbf{A})]\mathbf{T} = \langle \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{m1}, \ldots, \lambda_{mn} \rangle$$

where

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_n)\mathbf{P}\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_m \rangle, \quad \mathbf{T}\mathbf{T}^* = \mathbf{E}_{mn}.$$

8. Spectral decomposition of a direct product. Let us consider the simplest case where the f_{ij} are homogeneous linear functions, i. e. $f_{ij}(x) = b_{ij}x$ $(b_{ji} = \overline{b_{ij}})$. Then the hypermatrix $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ is a direct product:

$$[f_{ij}(\mathbf{A})] = [\mathbf{A} b_{ij}] = \mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} \qquad (\mathbf{B} = [b_{ij}]).$$

In this case the spectral decomposition (12.21) will become particularly simple. Indeed, let the spectral decomposition of $\mathbf{B}$ be

$$\text{(12.3)} \qquad \mathbf{V}^*\mathbf{B}\mathbf{V} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle, \quad \mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{E}_n,$$

then each block $[f_{ij}(a_k)] = a_k[b_{ij}]$ can be diagonalized by the same transforming matrix $\mathbf{V}$ in the form

$$\mathbf{V}^* \begin{bmatrix} a_k b_{11} & \dots & a_k b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k b_{n1} & \dots & a_k b_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{V} = a_k \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle.$$

The equation (12.21) reduces after the substitution $\mathbf{V}_1 = \dots = \mathbf{V}_k = \mathbf{V}$ to

$$(\mathbf{V}^* \cdot \times \mathbf{E}_n)\mathbf{P}^*(\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_m)(\mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B})(\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_m)\mathbf{P}(\mathbf{V} \cdot \times \mathbf{E}_n) =$$
$$= \langle a_1 b_1, \dots, a_1 b_n, a_2 b_1, \dots, a_2 b_n, \dots, a_m b_1, \dots, a_m b_n \rangle.$$

Finally, using once more the permutation matrix $\mathbf{P}$, we get from here

$$\mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} = (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{V}) \langle a_1 b_1, \dots, a_m b_1, \dots, a_1 b_n, \dots, a_m b_n \rangle (\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{V}^*) =$$
$$= \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j)(a_i b_j)(\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*).$$

Thus we have proved that if the hypermatrix is a direct product of two symmetrical matrices then the characteristic roots are the products of the characteristic roots of the factors and the characteristic vectors are the direct products of the characteristic vectors of the factors.

From here we deduce by straightforward application of the operational rules for direct products the following completition of a theorem of STÉPHANOS:

If the spectral decomposition of the symmetrical matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ is given by the equations (12.1, 12.3) then

$$(13) \qquad \sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \cdot \times \mathbf{B}^q = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j) (\sum_p \sum_q c_{pq} a_i^p b_j^q)(\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*).$$

We note for later application the particular case of (13) corresponding to

$$c_{10} = c_{01} = 1 \text{ and all other } c_{pq} = 0:$$

$$(13.1) \qquad \mathbf{A} \cdot \times \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \times \mathbf{B} = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j)(a_i + b_j)(\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*).$$

9. Application. There is no doubt that the concepts direct product as well as that of the hypermatrix owe their origin to grouptheoretical or other abstract considerations. Nevertheless these concepts turn out to be the appropriate tools for the mathematical investigation of various mechanical systems which possess regular structure. We confine ourselves here to show their application in lattice-dynamics.

In lattice-dynamics systems of particles are investigated which, in their equilibrium position, form a regular lattice, each particle being acted upon by its nearest neighbours and perhaps by a fixed boundary.

The knowledge of the normal vibrations of a finite lattice of particles is of prime importance in the corpuscular theory of matter, thus the equations of motion of a finite lattice have been investigated by several writers. In spite of these efforts, at present — as far as the writer is informed — it is only the one-dimensional lattice of equal equidistant particles whose normal vibrations are known. In the case of two- or three-dimensional lattices only the periods of the normal vibrations, i. e. the characteristic roots have been calculated[6]).

The application of Theorem B will enable us to determine the normal vibrations of a two- or three-dimensional lattice of particles with fixed boundary. The result is surprisingly simple: The characteristic vectors of a two- or three-dimensional lattice turn out to be the direct products of the characteristic vectors of the one-dimensional "edge-lattices", while the squares of the frequencies are equal to the sum or the squares of the frequencies of the one-dimensional edge-lattices.

Thus the analogy between the relation of a string to a membran and the relation of their lattice-models in complete.

In order to construct the spectral decomposition of the matrix belonging to a two-dimensional rectangular lattice with fixed boundary, we start with the well-known spectral decomposition of the matrix belonging to a one-dimensional lattice composed of m equal and equidistant particles and fixed boundary points[7])

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_m \left\langle 4\sin^2\frac{k\pi}{2m+2}\right\rangle \mathbf{S}_m =$$

$$= \sum_k 4\sin^2\frac{k\pi}{2m+2}\,\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*; \tag{14}$$

$$\mathbf{S}_m = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m]; \quad \mathbf{u}_i = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \begin{bmatrix} \sin\frac{i\pi}{m+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{2i\pi}{m+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{mi\pi}{m+1} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\mathbf{S}_m^* = \mathbf{S}_m; \ \mathbf{S}_m^2 = \mathbf{E}_m.$$

The mn-th order matrix which belongs to a two-dimensional rectangular lattice composed of mn equal particles and fixed boundaries can be written in the following forms[8])

[6]) See e. g. D. E. Rutherford, Some Continuant Determinants arising in Physics and Chemistry, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **62** (1947), 229—236; **63** (1952), 232—241.

[7]) See 1. c. [6]).

[8]) See 1. c. [6]).

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & -1 & & & & & & \\ -1 & 4 & & & & -1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ & & & 4 & & & & -1 & & & \\ -1 & & & & 4 & -1 & & & & & \\ & -1 & & & -1 & 4 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & & & & 4 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 4 & -1 \\ & & & & & & & & & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & & & \\ & \mathbf{C}_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{C}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{E}_m & -\mathbf{E}_m & & \\ -\mathbf{E}_m & 2\mathbf{E}_m & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\mathbf{E}_m \\ & & -\mathbf{E}_m & 2\mathbf{E}_m \end{bmatrix} = \mathbf{C}_m \cdot \times \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{C}_n .$$

Application of the formulae (13, 13. 1) and the spectral decomposition (14) of $\mathbf{C}_n$ gives immediately

$$\mathbf{C}_m \cdot \times \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{C}_n = (\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n) \left\langle 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2m+2} + 4 \sin^2 \frac{l\pi}{2n+2} \right\rangle (\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n),$$

$$(\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n)^* = \mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n ; \ (\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n)^2 = \mathbf{E}_{mn} .$$

If we write the matrices $\mathbf{S}_m$ and $\mathbf{S}_n$ in the partitioned form

$$\mathbf{S}_m = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]; \ \mathbf{S}_n = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]; \ \mathbf{v}_j^* = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{j\pi}{n+1}, \ldots, \sin \frac{nj\pi}{n+1} \right],$$

then the columns of the transforming matrix $\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n$ i. e. the characteristic vectors of the lattice will be given by

$$\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n = [\mathbf{u}_1 \cdot \times \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{u}_m \cdot \times \mathbf{v}_n] \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

where

$$\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \begin{bmatrix} \sin \frac{i\pi}{m+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{mi\pi}{m+1} \end{bmatrix} \cdot \times \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} \sin \frac{j\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(m+1)(n+1)}} \begin{bmatrix} \sin \frac{i\pi}{m+1} \sin \frac{j\pi}{n+1} \\ \sin \frac{2i\pi}{m+1} \sin \frac{j\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{mi\pi}{m+1} \sin \frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix}.$$

Thus we proved that the squares of the frequencies of the two-dimensional lattice are equal to the sums of squares of the frequencies of the one-dimensional edge-lattices and the characteristic vectors are equal to the direct products $\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j$ of the characteristic vectors of the edge-lattices.

Applying the same procedure to the hypermatrix

$$\mathbf{C}_m \cdot \times \mathbf{E}_n \cdot \times \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{C}_n \cdot \times \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{E}_n \cdot \times \mathbf{C}_r .$$

one obviously arrives to the spectral decomposition of the matrix belonging to a three-dimensional rectangular lattice with fixed boundary.

(Received May 7, 1954.)

Über die Konvergenz singulärer Integrale.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

§ 1. Einleitung.

H. LEBESGUE[1]) hat das Problem aufgeworfen, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufzufinden, daß das singuläre Integral

$$\Phi_n(f;x)=\int_a^b f(t)\varphi_n(x;t)\,dt \qquad (n=1,2,\ldots)$$

jede Funktion $f(t)$ einer gegebenen Funktionenklasse in einem Punkte x_0 darstellt, d. h. daß die Relation

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f;x_0)=f(x_0)$$

besteht. D. K. FADDEEFF[2]) hat dieses Problem im Falle der Funktionenklasse L und der Lebesgueschen Punkten gelöst. Seinen Satz haben S. G. KREJN und B. JA. LEVIN[3]) mit Anwendung der Theorie der Banachschen Räume bewiesen. B. I. KORENBLJUM, S. G. KREJN und B. JA. LEVIN[4]) haben das Lebesguesche Problem im Falle der Funktionenklasse L^p $(p>1)$ und der Lebesgueschen Punkten p-ter Ordnung gelöst.

In dieser Arbeit werden wir mit Anwendung der Theorie der Banachschen Räume eine andere, von derjenigen der erwähnten Autoren verschiedene, notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit der Funktionen von $L^p (p\geqq 1)$ in Lebesgueschen Punkten p-ter Ordnung geben. Mit Anwendung unserer Bedingung werden wir auch den Satz von D. K. FADDEEFF einfach beweisen können.

In folgendem werden wir uns auf den Fall $a=0$, $b=1$, $x_0=0$ beschränken; der allgemeine Fall kann darauf leicht zurückgeführt werden.[5])

---

[1]) H. LEBESGUE, Sur les intégrales singulières, *Annales de Toulouse*, 1 (1900), 25—117.

[2]) D. K. FADDEEFF, Sur la représentation des fonctions sommables au moyen d'intégrales singulières, *Recueil math. Moscou (Mat. Sbornik)*, 1 (43) (1936), 351—368.

[3]) С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О силной представимости функций сингулярными интегралами, Доклады Акад. Наук СССР, **60** (1948), 195—198.

[4]) Б. И. Кореньлюм, С. Г. Крейн и В. Я. Левин, О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов, Доклады Акад. Наук СССР, **62** (1948), 17—20.

[5]) Ich möchte Prof. B. SZ.-NAGY meinen aufrichtigen Dank aussprechen für seine wertvollen Ratschläge bei der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit.

§ 2. Hilfssatz.

Es sei in folgendem p ein bestimmter Exponent, $p \geqq 1$, und es bezeichne L_0^p die Klasse derjenigen Funktionen $f(t) \in L^p[0, 1]$, die im Punkte $x=0$ verschwinden und für die der Punkt $x=0$ ein Lebesguescher Punkt p-ter Ordnung ist, d. h. für die

$$f(0)=0 \quad \text{und} \quad \int_0^h |f(t)|^p dt = o(h) \qquad (0 < h \to 0)$$

gelten. Mit der Norm

$$\|f\|_0^{(p)} = \sup_h \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \qquad (0 < h \leqq 1) \tag{1}$$

bildet L_0^p einen Banachschen Raum.[6])

Es sei $\varphi(t)$ eine im Intervall $[0, 1]$ definierte meßbare Funktion und betrachten wir die Funktionaloperation

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt; \tag{2}$$

wir nehmen an, daß *$\Phi(f)$ in L_0^p überall definiert und endlich ist,* d. h. daß

---

[6]) Siehe z. B. a. a. O. [4]). Die Vollständigkeit des Raumes L_0^p folgt so: Es sei $f_n(t) \in L_0^p$ $(n=1, 2, \ldots)$ eine Cauchysche Funktionenfolge: $\|f_m - f_n\|_0^{(p)} \to 0$ $(m, n \to \infty)$. Dann ist auf Grund von (1)

$$\int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|^p dt \to 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

und so existiert eine Teilfolge $f_{n_k}(t)$ mit fast überall existierendem $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) = f(t)$; offenbar ist $f(0)=0$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $0 < h \leqq 1$. Sind n und n_k genügend groß, so gilt nach der Annahme

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f_{n_k}(t) - f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqq \|f_{n_k} - f_n\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

Mit Anwendung des Fatouschen Lemmas erhalten wir daraus

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} < \varepsilon \qquad (n > N(\varepsilon)).$$

Also besteht $\|f - f_n\|_0^{(p)} \to 0$ $(n \to \infty)$. Man hat ferner

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqq \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} + \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \|f - f_n\|_0^{(p)} + \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p},$$

woraus leicht zu sehen ist, daß $f(t)$ im Punkte $x=0$ einen Lebesgueschen Punkt p-ter Ordnung hat. Damit wurde die Vollständigkeit des Raumes L_0^p bewiesen.

dieses Integral für jede Funktion $f(t) \in L_0^p$ im Lebesgueschen Sinne existiert. Insbesondere existiert dann dieses Integral für jede solche Funktion $f(t)$, welche in einem Intervall $[0, \eta]$ verschwindet $(0 < \eta < 1)$ und im Intervall $[\eta, 1]$ zur Klasse $L^p[\eta, 1]$ gehört. Daraus folgt aber bekanntlich, daß $\varphi(t)$ in jedem solchen Intervall zur konjugierte Klasse $L^q[\eta, 1]$ gehört, $q = p/(p-1)$. Die Funktionaloperation

$$\Phi_\eta(f) = \int_\eta^1 f(t)\varphi(t)\,dt$$

ist für jedes feste η in L_0^p beschränkt:

$$|\Phi_\eta(f)| = \left|\int_\eta^1 \varphi(t) f(t)\,dt\right| \leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \left\{\int_0^1 |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \|f\|_0^{(p)} \text{[7]}.$$

Da für jede Funktion $f(t) \in L_0^p$

$$\lim_{\eta \to 0} \Phi_\eta(f) = \Phi(f)$$

gilt und $\Phi(f)$ endlich ist, ist $\Phi(f)$ nach dem Banach-Steinhausschen Satze eine beschränkte Funktionaloperation in L_0^p. Ihre Norm werden wir mit $\|\Phi\|_0^{(p)}$ bezeichnen:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} = \sup_f |\Phi(f)| \qquad (f \in L_0^p,\ \|f\|_0^{(p)} \leqq 1).$$

Hilfssatz. *Es gilt die Ungleichung*

$$4^{-\frac{1}{p}} A(p) \leqq \|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p),$$

mit

$$A(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q}.$$

Beweis. Ist $f(t) \in L_0^p$ und $\|f\|_0^{(p)} \leqq 1$, so gelten die Ungleichungen

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)\varphi(t)|\,dt \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q},$$

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt \leqq \frac{1}{2^m} \left\{2^m \int_0^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\} \leqq \frac{1}{2^m},$$

also gilt $\|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p)$.

---

[7]) Im Grenzfall $p = 1$, $q = \infty$ soll unter

$$\left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^q dt\right\}^{1/q}$$

der Grenzwert

$$\lim_{r \to \infty} \left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^r dt\right\}^{1/r} = \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\text{wes. ob. Gr.}}\ |h(t)|$$

verstanden werden.

Es sei ε eine beliebige gegebene positive Zahl. Dann existiert für jedes m im Intervall $(2^{-m-1}, 2^{-m})$ eine Funktion $f_m(t)$ mit den Eigenschaften:

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p dt = 1, \qquad \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} f_m(t)\varphi(t)dt \geqq \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt \right\}^{1/q} - \varepsilon.[8]$$

Es sei $f^*(t)$ diejenige, im Intervall $(0, 1)$ definierte Funktion, die im Intervall $(2^{-m-1}, 2^{-m})$ gleich der Funktion $2^{-m/p} f_m(t)$ ist $(m = 0, 1, \ldots)$. Dann gilt offenbar die Ungleichung

$$\Phi(f^*) \geqq A(p) - \frac{1}{1-2^{-1/p}}\,\varepsilon. \tag{3}$$

Sei $0 < h \leqq 1$ und sei $k = k(h)$ diejenige natürliche Zahl, für welche $2^{-k-1} < h \leqq 2^{-k}$ gilt. Auf Grund der Definition von $f^*(t)$ gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f^*(t)|^p dt \leqq 2^{k+1}\int_0^{2^{-k}} |f^*(t)|^p dt = 2^{k+1}\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p dt = 4,$$

woraus auch

$$\|f^*\|_0^{(p)} \leqq 4^{1/p}$$

folgt. Dieses Ergebnis, zusammen mit (3) ergibt:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} \geqq 4^{-1/p} A(p).$$

Damit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

§ 3. Sätze über die singulären Integrale.

Wir betrachten nun das singuläre Integral

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{4}$$

wir nehmen an, daß $\Phi_n(f)$ *für jedes* n *in* L_0^p *überall definiert und endlich ist*. Dann ist $\Phi_n(f)$ für jedes n eine beschränkte lineare Funktionaloperation in L_0^p. Setzt man

$$A_n(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p} \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt \right\}^{1/q} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

so gilt nach dem Hilfssatz die Ungleichung

$$4^{-1/p} A_n(p) \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)} \leqq A_n(p) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Satz I. *Dafür, daß die Relation*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(f) = f(0) \tag{7}$$

[8]) Siehe z. B. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932), 61—65.

für jede solche Funktion $f(t)$ aus der Klasse $L^p[0,1]$ gilt, für die $x=0$ ein Lebesguescher Punkt p-ter Ordnung ist, ist notwendig und hinreichend, daß

1) *die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\eta \varphi_n(t)\,dt=1$$

für jedes feste η $(0<\eta\leqq 1)$ besteht,

2) *die durch* (5) *definierten Größen $A_n(p)$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke $K=K(p)$ bleiben.*[9]

Notwendigkeit. Die Notwendigkeit von 1) folgt unmittelbar, wenn man diejenige Funktion $f(t)$ betrachtet, welche in $[0,\eta]$ gleich 1 und in $(\eta, 1]$ gleich 0 ist. Die Notwendigkeit von 2) kann folgendermaßen bewiesen werden. Nach (7) gilt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(0)=0$$

für jede Funktion $f(t)\in L_0^p$. Da die linearen Funktionaloperationen $\Phi_n(f)$ im Banachschen Raum L_0^p einzeln beschränkt sind, so folgt auf Grund des Banach-Steinhausschen Satzes, daß sie eine gemeinsame Schranke besitzen und so bleiben die Größen $A^n(p)$ nach (6) unterhalb einer von n unabhängigen Schranke.

Hinlänglichkeit. Es sei $f(t)\in L^p[0,1]$ eine Funktion, für die der Punkt $x=0$ ein Lebesguescher Punkt p-ter Ordnung ist. Es folgt auf Grund von 1), daß

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^1[f(t)-f(0)]\,\varphi_n(t)\,dt+f(0),$$

so daß es genügt, die Behauptung (7) im Falle $f(0)=0$, d. h. für Funktionen $f(t)$ der Klasse L_0^p zu beweisen.

Es sei also $f(t)\in L_0^p$. Ist $\varepsilon>0$ beliebig vorgegeben, so hat man für genügend kleine h:

$$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h|f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}<\frac{\varepsilon}{K}; \tag{8}$$

[9]) Bei B. I. Korenbljum, S. G. Krejn und B. Ja. Levin (a. a. O. [4])) steht statt 2) die Bedingung $\|\Phi_n\|_0^{(p)}<K$ $(n=1,2,\ldots)$. Diese Autoren haben auch den Wert der Norm $\|\Phi_n\|_0^{(p)}$ $(p>1)$ bestimmt:

$$\|\Phi_n\|_0^{(p)}=\int_0^1[-\Psi_n'(t)]^{1/q}\,dt,$$

wo $\Psi_n(t)$ die größte konvexe Funktion ist, für die

$$\Psi_n(t)\leqq F_n(t)=\int_t^1|\varphi_n(y)|^q\,dy \qquad (0<t\leqq 1)$$

gilt.

man wähle die natürliche Zahl m_0 derart, daß die Ungleichung (8) für alle Werte h gilt, für die $0 < h \leqq 2^{-m_0}$ ist. Wir schreiben $\Phi_n(f)$ in der folgenden Form an:

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt = \left(\int_0^{2^{-m_0}} + \int_{2^{-m_0}}^1\right) f(t)\varphi_n(t)\,dt = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}.$$

Es sei $f^*(t) = f(t)$ für $t \in [0, 2^{-m_0}]$ und $f^*(t) = 0$ sonst. Offenbar ist $\|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon/K$ und so gilt auf Grund der Ungleichung (6) und der Bedingung 2) für jedes n

$$(9) \qquad |I_1^{(n)}| = \left|\int_0^{2^{-m_0}} f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 f^*(t)\varphi_n(t)\,dt\right| \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)}\|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

Mit Anwendung der Minkowskischen Ungleichung und auf Grund der Bedingung 2) ergibt sich

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\left\{\int_{2^{-m_0}}^1 |\varphi_n(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} \leqq \sum_{m=0}^{m_0-1}\left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} \leqq \\ &(2^{m_0-1})^{1/p}\sum_{m=0}^{m_0-1} 2^{-m/p}\left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} \leqq (2^{m_0-1})^{1/p}A_n(p) \leqq (2^{m_0-1})^{1/p}K. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus Bedingung 1) für jede Treppenfunktion $h(t)$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{2^{-m_0}}^1 h(t)\varphi_n(t)\,dt = 0,$$

woraus sich auf Grund von (10) auch

$$\lim_{n\to\infty}\int_{2^{-m_0}}^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt = 0$$

ergibt. Also gilt für genügend große n: $|I_2^{(n)}| < \varepsilon$, und folglich, wegen (9), auch $|\Phi_n(f)| < 2\varepsilon$.

Also gilt $\Phi_n(f) \to 0$. Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

Von Satz I folgt der

Satz II (von D. K. FADDEEFF, a. a. O.[2]). *Dafür, daß die Relation* (7) *für jede solche Funktion* $f(t)$ *aus der Klasse* $L[0,1]$ *gilt, für die* $x = 0$ *ein Lebesguescher Punkt ist, ist notwendig und hinrechend, daß die Bedingung* 1) *des Satzes I erfüllt wird und für jedes* n *gilt:*

$$\int_0^1 \psi_n(t)\,dt < M \ (< \infty),$$

wobei

$$\psi_n(t) = \underset{t \leqq y \leqq 1}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(y)| \qquad (0 < t \leqq 1)$$

bedeutet.

Beweis. Wir brauchen nur die Ungleichungen

$$\frac{1}{2} A_n(1) \leqq \int_0^1 \psi_n(t) dt \leqq A_n(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

zu beweisen, da daraus mit Anwendung des Satzes I der obige Satz folgt. Nach der Definition von $\psi_n(t)$ ergibt sich einerseits die Abschätzung

$$\int_0^1 \psi_n(t) dt \geqq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t) dt \geqq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m-1} \underset{2^{-m} \leqq t \leqq 2^{-m+1}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| = \frac{1}{2} A_n(1).$$

Für jedes m gilt andererseits

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t) dt \leqq 2^{-m-1} \sum_{\mu=0}^{m} \underset{2^{-\mu-1} \leqq t \leqq 2^{-\mu}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)|$$

und so ist

$$\int_0^1 \psi_n(t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t) dt \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} \underset{2^{-\mu-1} \leqq t \leqq 2^{-\mu}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| \left\{ \sum_{m=\mu}^{\infty} 2^{-m-1} \right\} = A_n(1).$$

Auf Grund des Satzes I können wir beweisen auch den

Satz III. *Dafür, daß die Relation* (7) *für jede solche Funktion $f(t)$ aus der Klasse $L[0, 1]$ gilt, für die $x = 0$ ein Lebesguescher Punkt ist, ist notwendig und hinreichend, daß*

a) *die Relation* (7) *für die Funktionen aller Klassen $L_0^{(p)}$ mit $p > 1$ gilt,*

b) *für $p > 1$ die Normen $\| \Phi_n \|_0^{(p)}$ unterhalb einer von p und n unabhängigen Schranke bleiben.*

Notwendigkeit. Ist $p \gtrless 1$, so gilt $L_0^p \subseteqq L_0^1$ und $\| \Phi_n \|_0^{(p)} \leqq \| \Phi_n \|_0^{(1)}$, woraus die Notwendigkeit der obigen Bedingungen klar ist.

Hinlänglichkeit. Wegen a) wird die Bedingung 2) des Satzes I auf Grund des Satzes I erfüllt. Für jede natürliche Zahl k besteht die folgende Abschätzung:

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \underset{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| \leqq$$

$$\sum_{m=0}^{k} \left| 2^{-m} \underset{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| - 2^{-m/p} \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt \right\}^{1/q} \right| + A_n(p).$$

Für $p \to 1$, d. h. für $q \to \infty$ strebt jedes Glied der Summe Σ an der rechten Seite gegen 0, und folglich gilt für genügend kleines $p-1$:

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \underset{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| \leqq 1 + A_n(p).$$

Da k beliebig ist, so bleiben die Größen $A_n(1)$ auf Grund von b) und (6) unterhalb einer von n unabhängigen Schranke, und so ergibt sich mit Anwendung des Satzes I die Hinlänglichkeit der Bedingungen a) und b).

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

(Eingegangen am 1. Mai 1954.)

On the Prüfer manifold and a problem of Alexandroff and Hopf.

By TUDOR GANEA in Bucharest (Roumania).

1. Let L denote the real line, taken with discrete topology, and let P be the upper half-plane $y>0$ of the (x, y)-plane, with its usual topology. Let M be the topological product $L\times P$, and let W denote the nontriangulable manifold of PRÜFER [**2**; **3**, p. 71].

Theorem. *M is a nonseparable metrizable space. W is a connected, nonnormal, regular, locally Euclidean space. W is a decomposition space of M, and the corresponding identification map $\varphi\colon M\to W$ is a continuous, open, local homeomorphism.*

Remarks. i) The nonnormality of W is a stronger result than the known fact [**2**] that the 2nd countability axiom fails to hold on W. For, had W a countable base of open sets, so would its regularity imply, by a well known theorem of TYCHONOFF [**4**], that W be normal.

ii) P. ALEXANDROFF and H. HOPF have raised the question [**1**, p. 70] whether there exists or not a regular, nonnormal decomposition space of a normal space. Since the space M is obviously normal, their problem is answered in the affirmative. Moreover, the space M is not only normal, but even metrizable, while the decomposition space W is not only regular, but even completely regular. The identification map $\varphi\colon M\to W$ is not only strongly continuous (stark stetig [**1**, p. 65]); it is even an open local homeomorphism.

iii) It is known that, if X is normal and $f\colon X\to Y$ is continuous and closed, then Y is also normal. Our result shows that this need not hold any longer when closed is replaced by open.

2. It is obvious that $M=L\times P$ is a nonseparable metrizable space.

We shall use the complex number notation for points in P, i. e. $z=x+iy$, with $i=\sqrt{-1}$.

For each $t\in L$, let $f_t\colon P\to P$ be defined by

$$f_t(z)=z+\frac{z-t}{|z-t|}.$$

This is a homeomorphism mapping P on the open set $P(t)$ consisting of the points $z \in P$ which satisfy $|z-t|>1$. By means of the formula

$$f_t^{-1}(A)=f_t^{-1}[A \cap P(t)],$$

valid for any $A \subset P$, we shall frequently simplify the notations in the sequel.

For any $(t_0, z_0) \in M$, define

$$C(t_0, z_0)=\{(t_0, z_0)\} \cup \{(t, f_t f_{t_0}^{-1}(z_0)) \mid t \in L\}.$$

If $|z_0-t_0| \leqq 1$, then $f_{t_0}^{-1}(z_0)$ is empty, hence

$$C(t_0, z_0)=\{(t_0, z_0)\};$$

if $|z_0-t_0|>1$, then any (t, z) in $C(t_0, z_0)$ satisfies $|z-t|>1$ and

$$C(t_0, z_0)=\{(t, z) \mid f_t^{-1}(z)=f_{t_0}^{-1}(z_0)\}.$$

Any $(t_0, z_0) \in M$ belongs to $C(t_0, z_0)$ and it is readily seen that any two $C(t_j, z_j)$, $j=1, 2$, are either disjoint or identical. Thus we have a decomposition of the space M into disjoint closed subsets. We define[1]) the PRÜFER manifold W as the associated decomposition space and denote the corresponding identification map by

$$\varphi: M \rightarrow W.$$

Any $C(t_0, z_0)$ meets each $t \times P \subset M$ in at most one point. For any $A \subset P$ we have

$$(t \times P) \cap \varphi^{-1}\varphi(t_0 \times A)=\begin{cases} t_0 \times A & \text{if } t=t_0 \\ t \times f_t f_{t_0}^{-1}(A) & \text{if } t \neq t_0, \end{cases} \tag{1}$$

hence

$$\varphi^{-1}\varphi(t_0 \times A)=(t_0 \times A) \cup \bigcup_{t \in L}(t \times f_t f_{t_0}^{-1}(A)). \tag{2}$$

1) According to T. RADÓ [2, p. 107—110], the PRÜFER manifold R consists of real points, having three real coordinates (x, y, a) subject to the conditions $y>0$, $(x-a)^2+y^2 \leq 1$, and imaginary points (x, y, i) where x, y are reals with $y>0$, while $i=\sqrt{-1}$. For each real a, let $B(a)$ be the set of all the points of R, having a or i as their third coordinate; let also T_a be the one-one transformation of $B(a)$ onto the upper half-plane P, defined by $T_a(x, y, a)=z$ and $T_a(x, y, i)=f_a(z)$, where $z=x+iy$ and f_a is the same as above. A topology is introduced in R, according to which each $B(a)$ is open in R, while T_a is a homeomorphism of $B(a)$ with P [2, p. 110].

It is now a simple matter to realize the equivalence between RADÓ's definition and the one given in the present paper.

Let S be the transformation of $M=L \times P$ onto R, defined by

$$S(t, z)=\begin{cases} (x, y, t) & \text{with } z=x+iy, \text{ if } |z-t| \leq 1, \\ (x', y', i) & \text{with } f_t^{-1}(z)=x'+iy', \text{ if } |z-t|>1. \end{cases}$$

The transformation S_a of P onto $B(a)$, defined by $S_a(z)=S(a,z)$, is one-one; its inverse is RADÓ's T_a, i. e. $S_a^{-1}=T_a$. Since T_a is a homeomorphism, so is S_a; since each $B(a)$ is open in R, it follows that S is continuous and open. Setting now $\psi=S\varphi^{-1}$, we obtain the desired homeomorphism of W onto R.

3. Since W is obtained from M by topological identification, φ is a continuous map. It is also an open map; for, if $U \subset P$ is open, since each f_t is continuous and open, (2) implies that the set $\varphi^{-1}\varphi(t \times U)$ is open in M, hence $\varphi(t \times U)$ is open in W.

Since each $C(t_0, z_0)$ meets $t \times P$ in at most one point, φ maps each open subset $t \times P$ of M topologically onto the open subset $\varphi(t \times P)$ of W. It follows that φ is a local homeomorphism.

4. Since each $p \in W$ belongs to some $\varphi(t \times P)$, which is open in W and homeomorphic to a plane, the space W is locally Euclidean. Since, for example, the point $\varphi(0, 2i)$ belongs to each $\varphi(t \times P)$, which is a connected subset, the space W is connected.

5. W is a Hausdorff space. For, let

$$p_1 = \varphi(t_1, z_1) \neq \varphi(t_2, z_2) = p_2.$$

If $t_1 = t_2 = t$, then $z_1 \neq z_2$; let $U_j \ni z_j$ $(j = 1, 2)$ be open in P, satisfying $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, where $\emptyset$ is the empty set. It follows that $p_j \in \varphi(t \times U_j)$, which is open in W $(j = 1, 2)$ and, since φ is univalent on $t \times P$,

$$\varphi(t \times U_1) \cap \varphi(t \times U_2) = \emptyset.$$

Let us now assume that $t_1 \neq t_2$.

If, for example, $|z_1 - t_1| > 1$ holds, then let

$$z_2' = f_{t_2} f_{t_1}^{-1}(z_1),$$

hence

$$\varphi(t_2, z_2') = \varphi(t_1, z_1) = p_1 \neq p_2 = \varphi(t_2, z_2)$$

and the distinct points p_1, p_2 may be separated by open sets as above.

If, on the contrary, both $|z_1 - t_1| \leqq 1$ and $|z_2 - t_2| \leqq 1$ hold, then $t_1 \neq t_2$ implies, for example, $t_2 - t_1 = 2r > 0$ and the open subset $U_j = \{z \mid |z - t_j| < 1 + r\}$ of P contains z_j $(j = 1, 2)$. As a consequence, p_j belongs to the open subset $\varphi(t_j \times U_j)$ of W and

$$\varphi(t_1 \times U_1) \cap \varphi(t_2 \times U_2) = \emptyset$$

holds. For, the presence of a $\zeta_j \in U_j$ $(j = 1, 2)$ satisfying

$$\varphi(t_1, \zeta_1) = \varphi(t_2, \zeta_2)$$

implies, since $t_1 \neq t_2$,

$$|\zeta_j - t_j| > 1 \quad \text{and} \quad f_{t_1}^{-1}(\zeta_1) = f_{t_2}^{-1}(\zeta_2).$$

It follows that

$$\zeta_1 - \frac{\zeta_1 - t_1}{|\zeta_1 - t_1|} = \zeta_2 - \frac{\zeta_2 - t_2}{|\zeta_2 - t_2|} = \alpha,$$

$$|\alpha - t_j| = |\zeta_j - t_j| - 1 < r,$$

hence

$$|t_2 - t_1| \leqq |t_2 - \alpha| + |\alpha - t_1| < 2r,$$

which contradicts the definition of r.

6. Since W is a Hausdorff locally Euclidean space, it is locally compact, regular and completely regular.

7. It remains to show that W is not normal. For this purpose, let L_1, L_2 be the sets of rational, respectively irrational numbers of L. The set

$$A_j = \{(t, t+i) \mid t \in L_j\} \text{ is closed in } M \text{ and } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Let $F_j = \varphi(A_j)$, $j = 1, 2$; from $|t+i-t| = 1$ it follows that $\varphi^{-1}(F_j) = A_j$, thus, for $j = 1, 2$,

$$F_j \text{ is closed in } W \text{ and } F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Let now V_j be any open subset of W containing F_j ($j = 1, 2$); we shall prove that

(3) $$V_1 \cap V_2 \neq \emptyset.$$

In fact, for each $t \in L$ there exists an open disk $D_t \subset P$, centered in $t+i$ and such that

$$t \times D_t \subset \varphi^{-1}(V_j),$$

hence

$$\varphi^{-1}\varphi(t \times D_t) \subset \varphi^{-1}(V_j) \quad \text{if} \quad t \in L_j.$$

For any $t \in L$, let

$$H_t = f_t^{-1}(D_t) \subset P \quad \text{and} \quad G_j = \bigcup_{t \in L_j} H_t.$$

Formula (1) implies that

$$0 \times f_0(G_j) \subset \varphi^{-1}\varphi\Big(\bigcup_{t \in L_j} t \times D_t\Big),$$

hence

$$0 \times f_0(G_1 \cap G_2) \subset \varphi^{-1}(V_1) \cap \varphi^{-1}(V_2).$$

Finally, (3) is a consequence of

$$\varphi^{-1}(V_1) \cap \varphi^{-1}(V_2) \neq \emptyset,$$

which follows from the inequality

$$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset,$$

which we proceed now to prove.

For $j = 1, 2$ and $n, l = 1, 2, \ldots$ let

$$M_j^n = \left\{ t \,\middle|\, t + \frac{i}{n} \in G_j \right\} \quad \text{and} \quad N_j^l = \bigcup_{n \geqq l} M_j^n.$$

It is obvious that, for each $t \in L_j$, $t + \dfrac{i}{n} \in G_j$, hence $t \in M_j^n$ holds for almost all the indices n; as a consequence

(4) $$L_j \subset \cap N_j^l.$$

Furthermore, $t \in \cap N_j^l$ implies $t + \dfrac{i}{n_l} \in G_j$, where $n_l \geqq l$ for each $l \geqq 1$. Assuming now

(5) $$G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

we obtain $t \in L_j$, hence

(6) $$\cap N_j^l \subset L_j,$$

since $t \in L_{3-j}$ implies $t + \frac{i}{n} \in G_{3-j}$ for almost all the indices n.

Since G_j is open in P, M_j^n and N_j^l are open subsets of the real line R in its usual topology. On account of (4) and (6), we see that (5) implies that L_1, the set of rational numbers, is a G_δ in R, which is known to be impossible: the nonnormality of the space W is thereby completely proved.

(Added in proof:) The author realized recently that the nonnormality of the Prüfer manifold has already been proved by E. CALABI and M. ROSENLICHT in their paper: Complex analytic manifolds without countable base, *Proceedings American Math. Soc.*, **4** (1953), 335—340.

References.

[1] P. ALEXANDROV—H. HOPF, *Topologie* I (Berlin, 1935).

[2] T. RADÓ, Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *these Acta,* **2** (1925), 101—121.

[3] S. STOILOW, *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques* (Paris, 1938).

[4] A. TYCHONOFF, Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn, *Math. Annalen,* **95** (1926), 139—142.

(Received April 13, 1954.)

Über die Divergenz der Fourierreihen.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

A. G. DŽVARSEJŠVILI[1]) hat den folgenden Satz bewiesen: *Ist die Funktion $f(x) \in L$ in der abgeschlossenen Menge $E \subset [-\pi, \pi]$ gleich 0, so konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ in jedem Punkte größter Dichte von E nach 0, wenn die Bedingung*

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \omega(f; \delta_k) < \infty$$

erfüllt ist, wo δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ die Ergänzungsintervalle von E und $\omega(f; \delta_k)$ die Schwankung von $f(x)$ in δ_k bezeichnen.

In dieser Note werden wir beweisen, daß dieser Satz nicht mehr gilt, wenn man die Bedingung (1) wegläßt. Es gilt nämlich die folgende Behauptung:

Es existiert eine abgeschlossene Menge $E \subset [-\pi, \pi]$ und eine stetige Funktion $f(x)$ so, daß $f(x)$ in E überall verschwindet, $x = 0$ ein Punkt größter Dichte von E ist, und die Fourierreihe von $f(x)$ im Punkte $x = 0$ divergiert.

B e w e i s. Es ist klar, daß die positiven ganzen Zahlen p_k, q_k so bestimmt werden können, daß für die Größen

$$(2) \qquad u_k = \pi/p_k, \quad h_k = 2\pi/q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(3) \qquad 0 < \cdots < u_k < \cdots < u_1 \leqq \pi;$$

$$(4) \qquad h_k \leqq u_k - u_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$(5) \qquad \sum_{k=m}^{\infty} h_k = o(u_{m+1});$$

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{u_{k+1}} = \infty.$$

Wir betrachten die offenen Intervalle

$$I_k = (u_{k+1}, u_{k+1} + h_k), \quad I_{-k} = (-u_{k+1} - h_k, -u_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Auf Grund von (3) und (4) ist $I_k \cap I_l = 0$ $(k \neq l)$. Es seien

$$G = \cdots \cup I_{-2} \cup I_{-1} \cup I_1 \cup I_2 \cup \cdots$$

---

[1]) A. G. DŽVARSEJŠVILI, Über ein Konvergenzkriterium der Fourierreihe, *Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR*, **11** (1950), 403—407. (Russisch.) (Verf. kennt dieses Ergebnis nur aus dem Referat in *Math. Reviews*, **14** (1953), 635.)

und $E = [-\pi, \pi] - G$. Die Menge E ist abgeschlossen und $x = 0$ ist ein Punkt größter Dichte von E. Ist nämlich $u_{m+1} < h \leqq u_m$, so gilt nach der Definition von G

$$\frac{\operatorname{mes}(G \cap [-h, h])}{2h} \leqq \frac{h_m + h_{m+1} + \cdots}{u_{m+1}},$$

und so ist nach (5)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{mes}(G \cap [-h, h])}{2h} = 0;$$

es folgt hieraus, daß $x = 0$ ein Punkt größter Dichte von E ist.

Wir definieren die nach 2π periodische Funktion $f(x)$ folgenderweise:

$$f(x) = \begin{cases} a_k \sin m_k x, & x \in I_k \quad (k = 1, 2, \ldots); \\ -a_k \sin m_k x, & x \in I_{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots); \\ 0, & x \in E, \end{cases}$$

wo die positive Zahl a_k und die natürliche Zahl m_k die folgenden Bedingungen erfüllen:

(7) $$\lim_{k \to \infty} a_k = 0;$$

(8) $$m_k = c_k p_k q_k \qquad (c_k \text{ positive, ganze Zahl; } k = 1, 2, \ldots);$$

(9) $$|m_k - m_l| \geqq 2^{-1} \max (m_k, m_l) \text{ für } m_k \neq m_l.$$

Nach der Definition ist $f(x)$ eine gerade Funktion und nach (2) und (8) ist $f(x)$ stetig.

Es bezeichne $s_\nu(f; x)$ die ν-te Partialsumme der Fourierreihe von $f(x)$. Nach der bekannten Formel

$$s_\nu(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin \nu t}{t} dt + o(1)$$

ergibt sich für $s_\nu(f; 0)$ der folgende Ausdruck:

(10) $$s_\nu(f; 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k} \sin m_k t \frac{\sin \nu t}{t} dt + o(1).$$

Wir betrachten die folgende Identität:

(11) $$\int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k} \frac{\sin^2 m_k t}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k} \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k} \frac{\cos 2 m_k t}{t} dt.$$

Mit Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhalten wir die Abschätzung:

$$\left| \int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k} \frac{\cos 2 m_k t}{t} dt \right| = \left| \frac{1}{u_{k+1}} \int_{u_{k+1}}^{\xi} \cos 2 m_k t \, dt \right| \leqq \frac{1}{u_{k+1} m_k} \qquad (u_{k+1} \leqq \xi \leqq u_{k+1} + h_k)$$

und so gilt nach (11)

$$\int\limits_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k} \frac{\sin^2 m_k t}{t}\,dt \geqq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{u_{k+1}m_k}. \tag{12}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$\int\limits_{u_{l+1}}^{u_{l+1}+h_l} \sin m_l t\,\frac{\sin m_k t}{t}\,dt = \frac{1}{u_{l+1}}\int\limits_{u_{l+1}}^{\zeta} \sin m_l t \sin m_k t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2u_{l+1}}\int\limits_{u_{l+1}}^{\zeta} [\cos(m_l-m_k)t-\cos(m_l+m_k)t]\,dt \quad (u_{l+1}\leqq\zeta\leqq u_{l+1}+h_l).$$

Hieraus ergibt sich für $m_k \neq m_l$ die Ungleichung:

$$\left|\int\limits_{u_{l+1}}^{u_{l+1}+h_l} \sin m_l t\,\frac{\sin m_k t}{t}\,dt\right| \leqq \frac{1}{u_{l+1}}\left[\frac{1}{|m_l-m_k|}+\frac{1}{m_l+m_k}\right] \leqq 3\,\frac{1}{u_{l+1}}\,\frac{1}{m_l}. \tag{13}$$

Auf Grund der Bedingung (6) gilt

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)=\infty,$$

und so existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $1=N_1<\cdots<N_n<\cdots$, für die

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)=\infty$$

ist. Es sei $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_n>0$, $n=1,2,\ldots$) eine Zahlenfolge, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0, \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\log\prod_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)=\infty. \tag{15}$$

Es sei weiterhin $\{\nu_n\}$ ($n=1,2,\ldots$) eine Folge von natürlichen Zahlen, für die die Relationen

$$\nu_{n+1}-\nu_n \geqq \nu_n/2 \qquad (n=1,2,\ldots); \tag{16}$$

$$\nu_n = d_k^{(n)} p_k q_k \quad (d_k^{(n)} \text{ positive, ganze Zahl};\ n=1,2,\ldots;\ N_n\leqq k<N_{n+1}); \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(N_{n+1}-N_n)}{\nu_n}\sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\frac{1}{u_{k+1}}<\infty \tag{18}$$

bestehen.

Wir bestimmen endlich die in der Definition $f(x)$ stehenden Größen a_k und m_k folgenderweise: es seien

(19) $$a_k = \alpha_n,\quad m_k = \nu_n \quad \text{für } N_n \leqq k < N_{n+1}.$$

Nach (14), (16) und (17) sind die Bedingungen (7), (8) und (9) erfüllt.

Ist $N_n \leqq i < N_{n+1}$, so erhalten wir nach (10), (12) und (13):

$$s_{m_i}(f;0) \geqq \frac{1}{\pi}\alpha_n \log \prod_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(N_{n+1}-N_n)}{\nu_n}\sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\frac{1}{u_{k+1}} + o(1).$$

Daraus ergibt sich nach (15) und (18), daß $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, s_\nu(f;0) = \infty$ ist.

Es ist klar, daß die Bedingung (1) in diesem Falle nicht erfüllt ist. $\omega(f;I_k)$ ist nämlich gleich $2a_k$ und nach (5) gilt $\lim\limits_{k\to\infty} h_k/u_{k+1} = 0$, und so ist für genügend großes k

$$\log\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right) \leqq 1.$$

Daraus ergibt sich nach (15) und (19) für genügend großes n:

$$\sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\omega(f;I_k) \geqq 2\alpha_n \log \sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right) \to \infty,$$

also ist $\sum\limits_k \omega(f;I_k) = \infty$.

(Eingegangen am 20. August 1954.)

On a problem in set theory.

By G. FODOR in Szeged.

P. ERDŐS has posed the following problem:

Let $\mathfrak{m}$ be an infinite cardinal number, φ the initial number of power $\mathfrak{m}$, and $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ the set of ordinal numbers less than φ. Further let $\mathfrak{n}$ be a given cardinal number which is smaller than $\mathfrak{m}$. Suppose S is a given set of power $\mathfrak{m}$, and that to every element γ of $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ there corresponds a subset $S(\gamma)$ of S such that $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}$. Problem: Is there a subset Γ of power $\mathfrak{m}$ of $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ such that

$$\overline{\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)}} = \mathfrak{m} \ ?$$

If we replace the condition $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ by $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$, the answer is in general negative. Indeed, let $S = \Gamma_{\mathfrak{m}}$ and define the set $S(\gamma)$ as the set of all $\beta < \gamma$. Clearly for any subset Γ of power $\mathfrak{m}$ of $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ we have

$$S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma) = 0.$$

ERDŐS has proved[1]) that the answer to the problem (with $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$) is in the affirmative, but his proof uses the generalized continuum hypothesis.

We shall give in this paper a proof without using the generalized continuum hypothesis.[2])

First we prove the following

Lemma 1. *Let $\mathfrak{q}$ be a regular cardinal number and $\mathfrak{p}$ a cardinal number which is smaller than $\mathfrak{q}$. If to every element γ of $\Gamma_{\mathfrak{q}}$ there corresponds an ordinal number $g(\gamma) \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$, then there exists an ordinal number $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$ and a subset Γ of power $\mathfrak{q}$ of $\Gamma_{\mathfrak{q}}$ such that for every element γ of Γ we have $g(\gamma) < \pi$.*

Proof. Let $H(\alpha)$ denote for every ordinal number $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$ the set of all $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{q}}$ for which $g(\gamma) = \alpha$. It is clear that

$$\Gamma_{\mathfrak{q}} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{p}}} H(\alpha).$$

As $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{q}$ is regular it follows that there exists an ordinal number $\pi' \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$ for which $\overline{\overline{H(\pi')}} = \mathfrak{q}$. By the definition of $H(\alpha)$ the lemma holds with $\Gamma = H(\pi')$ and $\pi = \pi' + 1$.

[1]) P. ERDŐS, Some remarks on set theory. III, *Michigan Math. Journal*, **2** (1953/54), 51—57.

[2]) I am indepted to P. ERDŐS and L. GILLMAN who after reading the first draft of this paper simplified my original proof.

Lemma 2. *Let* $\mathfrak{a}$ *be a transfinite singular cardinal number and* $\mathfrak{b}$ *a regular cardinal number which is smaller than* $\mathfrak{a}$. *Further let* $\mathfrak{r}$ *denote the smallest cardinal number such that* $\mathfrak{a}$ *is the sum of* $\mathfrak{r}$ *cardinal numbers each of which is less than* $\mathfrak{a}$. *If* $\mathfrak{b} > \mathfrak{r}$ *and to every element* γ *of* $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ *there corresponds an ordinal number* $h(\gamma) \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ *then there exists an ordinal number* $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ *and a subset* Γ *of power* $\mathfrak{a}$ *of* $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ *such that for every element* γ *of* Γ *we have* $h(\gamma) < \pi$.

Proof. Let μ denote the initial number of $\mathfrak{r}$. There exist regular cardinal numbers $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\xi, \ldots$ $(\xi < \mu)$ such that $\mathfrak{a}_\beta > \mathfrak{a}_\alpha$ for $\beta > \alpha$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}_\xi < \mathfrak{a}$ for every $\xi < \mu$ and

$$\mathfrak{a} = \sum_{\xi < \mu} \mathfrak{a}_\xi .$$

By lemma 1 there exists for every ordinal number $\xi < \mu$ an ordinal number $\pi_\xi \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ such that there are $\mathfrak{a}_\xi$ ordinal numbers $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$ satisfying $h(\gamma) < \pi_\xi$. Indeed, let $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_\xi$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ and $g(\gamma) = h(\gamma)$ on $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$. As $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}_\xi$ and $\mathfrak{a}_\xi$ is regular, the conditions of lemma 1 are fulfilled. Accordingly, there exists an ordinal number $\pi_\xi \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ and a subset Γ_ξ of power $\mathfrak{a}_\xi$ of $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$ such that for every element γ of Γ_ξ we have $g(\gamma) = h(\gamma) < \pi_\xi$.

Since $\mathfrak{r} < \mathfrak{b}$ and $\mathfrak{b}$ is regular there exists an ordinal number $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ for which $\pi_\xi < \pi$ for every ξ, $0 \leqq \xi < \mu$. Let

$$\Gamma = \bigcup_{\xi < \mu} \Gamma_\xi .$$

Clearly the power of Γ is $\mathfrak{a}$. Let $\gamma \in \Gamma$. It follows that $\gamma \in \Gamma_{\xi_0}$ for some ordinal number $\xi_0 < \mu$. By the definition of Γ_ξ we have $h(\gamma) < \pi_{\xi_0}$. As $\pi_\xi < \pi$ and $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ the lemma 2 is proved.

Theorem. *Let* S *be a given infinite set of power* $\mathfrak{m}$, *and* $\mathfrak{n}$ *a given cardinal number which is smaller then* $\mathfrak{m}$. *If to every element* γ *of* $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ *there corresponds a subset* $S(\gamma)$ *of* S *such that* $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}$, *then there exists a subset* Γ *of power* $\mathfrak{m}$ *of* $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ *for which*

$$\overline{\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)}} = \mathfrak{m}.$$

Proof. If there exists a regular cardinal number $\mathfrak{s}$ for which $\mathfrak{m} > \mathfrak{s} \geqq \mathfrak{n}$, decompose S into the union of $\mathfrak{s}$ disjoint sets $M_\varkappa$, of power $\mathfrak{m}$,

$$S = \bigcup_{\varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}}} M_\varkappa .$$

Since $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}$ and $\mathfrak{s}$ $(\geqq \mathfrak{n})$ is regular, there exists an $f(\gamma) \in \Gamma_{\mathfrak{s}}$ so that for any $\varkappa > f(\gamma)$, $M_\varkappa \cap S_\gamma$ is empty. Thus, for a suitable $\mathfrak{s}$, there exist by our lemmas an ordinal number $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{s}}$ and a subset Γ of power $\mathfrak{m}$ of $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ such that for every element γ of Γ we have $f(\gamma) < \pi$, hence

$$S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma) \supset \bigcup_{\pi \leqq \varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}}} M_\varkappa$$

i. e.

$$\overline{\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)}} = \mathfrak{m}.$$

Suppose now that there is no regular cardinal number $\mathfrak{s}$, for which $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s} < \mathfrak{m}$. In this case $\mathfrak{m}$ is obviously regular.

Denote by N the set of all elements x of S for which $x \in S(\gamma)$ for every ordinal number γ, $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{m}}$. As $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}$ $(\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{m}})$, we have $\overline{\overline{N}} < \mathfrak{n}$. Let

$$(1) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\zeta, \ldots (\zeta < \varphi)$$

be any well-ordering of $X = S - N$ of the type φ. We shall define by transfinite induction a (single-valued) mapping $H(x)$ of the set X on the set $\{S(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{m}}}$ in the following manner: Let γ_0 be the smallest ordinal number $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{m}}$ for which $x_0 \notin S(\gamma)$, the existence of such a γ follows from the fact that $x_0 \in X$. Put $H(x_0) = S(\gamma_0)$. Let β be an arbitrary ordinal number, $1 \leqq \beta < \varphi$, and suppose that γ_ζ and $H(x_\zeta)$ are defined for every $\zeta < \beta$. If there is an ordinal number $\gamma \neq \gamma_\zeta$ $(\zeta < \beta)$, $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{m}}$, for which $x_\beta \notin S(\gamma)$, then let γ_β be the the smallest such ordinal number and let $H(x_\beta) = S(\gamma_\beta)$. In the opposite case, i. e. if $x_\beta \in S(\gamma)$ for any $\gamma \neq \gamma_\zeta$ $(\zeta < \beta)$, $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{m}}$, then let ζ_0 be the smallest ordinal number ζ $(\zeta < \beta)$ for which $x_\beta \notin S(\gamma_\zeta)$ and let $\gamma_\beta = \gamma_{\zeta_0}$, $H(x_\beta) = S(\gamma_{\zeta_0})$. The existence of such a ζ follows from the fact that $x_\beta \in X$.

Let $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{m}}$. We prove that

(i) if $A_\alpha = \{\eta_\zeta\}$ is the set of those $\eta \in \Gamma_{\mathfrak{m}}$ for which $\alpha = \gamma_\eta$, arranged in their natural order, then the power of A_α is smaller than $\mathfrak{n}$.

Suppose the contrary i. e. $\overline{\overline{A_\alpha}} \geqq \mathfrak{n}$. Let ψ be the initial number of $\mathfrak{n}$ and ϱ_0 the smallest ordinal number ϱ for which $\eta_\zeta < \varrho$ for every $\zeta < \psi$. Obviously $\varrho_0 \in \Gamma_{\mathfrak{m}}$, because $\mathfrak{m}$ is regular and $\overline{\overline{\psi}} = \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Let μ be an element of $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ for which $\mu \neq \gamma_\xi$ $(\xi < \varrho_0)$. By the definition of the set A_α and the mapping $H(x)$ we have $x_{\eta_\zeta} \in S(\mu)$ if $1 \leqq \zeta < \psi$. This is impossible, since $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}$ $(\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{m}})$.

By a theorem of S. PICCARD[3]), there exists a subset R of power $\mathfrak{m}$ of X for which

$$(2) \qquad R \cap H(R)^{4)} = 0.$$

The set R is well-ordered according to (1). Let $R = \{x_{\beta_\xi}\}_{\xi < \varphi}$. By (i) the power of the set Γ of all distinct γ_{β_ξ}'s $(\xi < \varphi)$ is $\mathfrak{m}$. According to (2)

$$R \subseteqq S - H(R) = S - \bigcup_{\xi < \varphi} S(\gamma_{\beta_\xi}) = S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma).$$

As $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{S}}$ we obtain that

$$\overline{\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)}} = \mathfrak{m}.$$

The theorem is proved.

(Received February 1, in revised form July 4, 1954.)

---

[3]) We mean the following theorem. Let $\mathfrak{p}$ be a regular cardinal number, $\mathfrak{p} \geqq \aleph_0$, and E a set of power $\mathfrak{p}$. If to every element $x \in E$ there corresponds a subset $E(x)$ $(x \notin E(x))$ of E such that for any $x \in E$ the power of the set $E(x)$ is smaller than a given cardinal number $\mathfrak{q}$ which is smaller than $\mathfrak{p}$, then E has a subset E' of power $\mathfrak{p}$ for which $E' \cap E(E') = 0$. [SOPHIE PICCARD, Sur un problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations, *Fundamenta Math.*, 29 (1937), 5—9.]

[4]) $H(R) = \bigcup_{x \in R} H(x)$.

Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen.

Von L. RÉDEI und O. STEINFELD in Szeged.

Durchwegs seien gegeben zwei Gruppen G, Γ, von denen wir bequemlichkeitshalber annehmen, daß sie elementfremd sind. Bekanntlich nennt man eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Schreiersche Erweiterung von Γ mit G, wenn $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler Γ' hat, so daß die Isomorphien

$$\Gamma' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/\Gamma' \approx \mathfrak{G}$$

gelten. Eine solche Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir kurz mit $G \circ \Gamma$.

Unter einer gegenseitigen Schreierschen Erweiterung von G und Γ verstehen wir jede Gruppe, die gleichzeitig ein $G \circ \Gamma$ und ein $\Gamma \circ G$ ist. Diese Gruppen bezeichnen wir mit $G \bullet \Gamma$. (Die Begriffe $G \bullet \Gamma$ und $\Gamma \bullet G$ fallen zusammen, dagegen braucht ein $G \circ \Gamma$ im allgemeinen kein $\Gamma \circ G$ zu sein.)

Ausführlich gesprochen sind also die $G \bullet \Gamma$ diejenigen Gruppen $\mathfrak{G}$, die zwei Normalteiler G', Γ' enthalten, so daß

$$G' \approx G, \quad \Gamma' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/G' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/\Gamma' \approx G$$

gelten. Ist dabei der Durchschnitt von G' und Γ' das Einselement (von $\mathfrak{G}$), so ist $\mathfrak{G}$ bekanntlich das direkte Produkt $G \times \Gamma$ von G und Γ. Auch umgekehrt ist $G \times \Gamma$ stets ein $G \bullet \Gamma$. Von Interesse sind also nur diejenigen $\mathfrak{G} = G \bullet \Gamma$, für die die genannten G', Γ' einen Durchschnitt mit mindestens zwei Elementen haben. Ein einfaches Beispiel dieser Art bilden drei zyklische Gruppen $G, \Gamma, \mathfrak{G}$, wenn mindestens das eine von G, Γ endlich ist und für die Ordnungen dieser Gruppen $O(\mathfrak{G}) = O(G)O(\Gamma)$, $(O(G), O(\Gamma)) > 1$ gelten; in der Tat ist dann $\mathfrak{G} = G \bullet \Gamma \neq G \times \Gamma$. Ein weiteres Beispiel bilden drei Gruppen $G, \Gamma, \mathfrak{G}$, von denen $\mathfrak{G}$ die (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte nichtkommutative elementare[1]) Gruppe mit $O(\mathfrak{G}) = p^3$ (p ungerade Primzahl), G die (zyklische) Gruppe mit $O(G) = p$ und Γ die nichtzyklische (Abelsche) Gruppe mit $O(\Gamma) = p^2$ ist.

Fortan bezeichnen a, b, c und α, β, γ beliebige Elemente, insbesondere e und ε das Einselement von G bzw. Γ.

Die Bestimmung aller $G \bullet \Gamma$ kann nach folgendem Satz geschehen:

---

1) Elementar nennt man eine Gruppe, wenn die Elemente außer dem Einselement von Primzahlordnung sind.

S a t z. *Man nehme vier Funktionen*

(1) $$a^b,\ \alpha^b\,(\in \Gamma),\quad \alpha^\beta,\ a^\beta\,(\in G)$$

von je zwei Variabeln mit den Eigenschaften

(2) $$e^a = a^e = \varepsilon^a = \varepsilon,\ \alpha^e = \alpha,\quad \varepsilon^\alpha = \alpha^\varepsilon = e^\alpha = e,\ a^\varepsilon = a,$$

(3) $$(\alpha\beta)^c = \alpha^c\beta^c,\qquad (ab)^\gamma = a^\gamma b^\gamma,$$

(4) $$b^c(\alpha^b)^c = \alpha^{bc}b^c,\qquad \beta^\gamma(a^\beta)^\gamma = a^{\beta\gamma}\beta^\gamma,$$

(5) $$(ab)^c(a^b)^c = a^{bc}b^c,\qquad (\alpha\beta)^\gamma(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}\beta^\gamma,$$

ferner vier Funktionen

(6) $$\varrho(\alpha),\ \sigma(a)\quad (\in \Gamma),\qquad r(a),\ s(\alpha)\quad (\in G)$$

von je einer Variabel mit den Eigenschaften

(7) $$\varrho(\alpha\beta) = \varrho(\alpha)\varrho(\beta),\qquad s(\alpha\beta) = \varrho(\alpha)^{\varrho(\beta)}s(\alpha)^{\varrho(\beta)}s(\beta),$$

(8) $$\sigma(ab)\varrho(a^b) = \sigma(a)\sigma(b),\quad \sigma(ab)^{\varrho(a^b)}r(ab)^{\varrho(a^b)}s(a^b) = \sigma(a)^{\sigma(b)}r(a)^{\sigma(b)}r(b),$$

(9) $$\varrho(\alpha)\sigma(a) = \sigma(a)\varrho(\alpha^a),\quad \varrho(\alpha)^{\sigma(a)}s(\alpha)^{\sigma(a)}r(a) = \sigma(a)^{\varrho(\alpha^a)}r(a)^{\varrho(\alpha^a)}s(\alpha^a)$$

und der weiteren Eigenschaft, daß die Abbildung

(10) $$(a,\alpha) \rightarrow (\sigma(a)^{\varrho(\alpha)}r(a)^{\varrho(\alpha)}s(\alpha),\ \sigma(a)\varrho(\alpha))$$

eine Permutation aller Elemente

(11) $$(a,\alpha)$$

ist. Wird dann in der Menge dieser Elemente (11) *die Multiplikation*

(12) $$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab,\ a^b\alpha^b\beta)$$

definiert, so entstehen (bis auf Isomorphie) eben die sämtlichen gegenseitigen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{G}$ *von* G *und* Γ.

Es gilt auch die folgende:

E r g ä n z u n g. *In einer solchen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *bilden die Elemente* (11) *mit*

(13) $$a = e\ \text{ bzw. }\ \sigma(a)\varrho(\alpha) = \varepsilon$$

je einen Normalteiler Γ', G' *mit*

(14) $$G' \approx G,\quad \Gamma' \approx \Gamma,\quad \mathfrak{G}/G' \approx \Gamma,\quad \mathfrak{G}/\Gamma' \approx G.$$

Dabei besteht der Durchschnitt

(15) $$\vartheta = G' \cap \Gamma'$$

aus denjenigen Elementen (e,α), *für die*

(16) $$\varrho(\alpha) = \varepsilon$$

ist. (Diese α bilden nach (7) den Kern des Endomorphismus $\alpha \rightarrow \varrho(\alpha)$ von Γ. Dann und nur dann ist also $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der Untergruppen G', Γ', wenn dieser Endomorphismus ein Meromorphismus ist.)

B e m e r k u n g. Unseren Satz kann man den Hauptsatz der gegenseitigen Schreierschen Gruppenerweiterungen nennen, da durch ihn das aufgeworfene Problem in ähnlichem Sinne erledigt ist, wie auch das Problem der (gewöhnlichen) Schreierschen Gruppenerweiterungen durch den bekannten Schreierschen Hauptsatz gelöst wurde. Nach unserem Satz scheint z. B. keine schwierige Aufgabe zu sein die gegenseitigen Schreierschen Erweiterungen von zwei endlich erzeugbaren[2]) Abelschen Gruppen explicit anzugeben. Mit diesem und weiteren Beispielen möchten wir uns an anderer Stelle beschäftigen. — Obwohl unser Problem symmetrisch in G und Γ ist, so zeigen sich doch in unserem Satz neben vielen Symmetrien auch gewisse Asymmetrien. Es wäre erwünscht, die Lösungen in vollkommen symmetrischer Form anzugeben, was uns aber nicht geglückt hat.

Beweis des Satzes. Wird in der Menge aller (11) eine Multiplikation

(17) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta)$$

definiert, wobei

(18) $$a^\beta, \alpha^b \quad (\in \Gamma)$$

irgendzwei Funktionen mit den „Anfangsbedingungen"

(19) $$e^\alpha = a^\varepsilon = \varepsilon^a = \varepsilon, \quad \alpha^e = \alpha$$

sind, so nennen wir nach RÉDEI[3]) die entstandene (multiplikative) Struktur ein Schreiersches Produkt von G und Γ und bezeichnen dieses mit $G \cdot \Gamma$. (Wegen (17), (19) hat $G \cdot \Gamma$ das Einselement (e, ε), braucht aber im allgemeinen nicht assoziativ zu sein.) Mit Hilfe dieses Begriffs lässt sich nach RÉDEI[3]) der erwähnte Schreiersche Hauptsatz in den folgenden zwei Sätzen formulieren:

(A) Die unter den Schreierschen Produkten $G \cdot \Gamma$ vorkommenden Gruppen sind (von Isomorphie abgesehen) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen $G \circ \Gamma$ (von Γ mit G). Und zwar bilden in jeder Gruppe $G \cdot \Gamma$ die Elemente (e, α) einen Normalteiler Γ' mit den Eigenschaften[4])

(20) $$\Gamma' \approx \Gamma \ ((e, \alpha) \to \alpha), \qquad (G \cdot \Gamma)/\Gamma' \approx G \ ((a, \varepsilon)\Gamma' \approx a).$$

(B) Damit ein Schreiersches Produkt $G \cdot \Gamma$ eine Gruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß

(21) $$(\alpha\beta)^c = \alpha^c \beta^c,$$

(22) $$b^c (\alpha^b)^c = \alpha^{bc} b^c,$$

(23) $$(ab)^c (a^b)^c = a^{bc} b^c$$

erfüllt sind.

Dies alles wollen wir auch auf Γ, G statt G, Γ anwenden. Zu diesem Zweck muß vor allem gesagt werden, daß nach obigem ein Schreiersches

---

[2]) Endlich erzeugbar nennen wir eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden.

[3]) L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie. *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[4]) Mit $S \approx S'$ $(\alpha \to \alpha')$ bezeichnen wir, daß $\alpha \to \alpha'$ eine isomorphe Abbildung der Struktur S auf die Struktur S' ist.

Produkt $\Gamma \cdot G$ aus den Elementen (α, a) besteht, die nach der Regel

$$(\alpha, a)\ (\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha^\beta a^\beta b) \tag{24}$$

multipliziert werden, wobei

$$\alpha^\beta, a^\beta\ (\in G) \tag{25}$$

zwei Funktionen sind, unterworfen den „Anfangsbedingungen"

$$\varepsilon^\alpha = \alpha^\varepsilon = e^\alpha = e, \quad a^\varepsilon = a. \tag{26}$$

Den Sätzen (A), (B) ähnlich gelten dann:

(A′) Die unter den Schreierschen Produkten $\Gamma \cdot G$ vorkommenden Gruppen sind (von Isomorphie abgesehen) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen $\Gamma \circ G$ (von G mit Γ). Und zwar bilden in jeder Gruppe $\Gamma \cdot G$ die Elemente (ε, a) einen Normalteiler G_0 mit den Eigenschaften

$$G_0 \approx G\ ((\varepsilon, a) \to a), \qquad (\Gamma \cdot G)/G_0 \approx \Gamma\ ((\alpha, e)G_0 \to \alpha). \tag{27}$$

(B′) Damit ein Schreiersches Produkt $\Gamma \cdot G$ eine Gruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(ab)^\gamma = a^\gamma b^\gamma, \tag{28}$$

$$\beta^\gamma (a^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma} \beta^\gamma, \tag{29}$$

$$(\alpha\beta)^\gamma (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma} \beta^\gamma \tag{30}$$

erfüllt sind.

Nach diesen Vorbereitungen legen wir uns ein Schreiersches Produkt

$$\mathfrak{G} = G \cdot \Gamma \tag{31}$$

vor. Dies besteht — wir wiederholen — aus den Elementen (a, α), die (nach (17) d. h.) nach (12) multipliziert werden, wobei für die Funktionen a^b, α^b ((18) und (19) d. h.) (1_1) und (2_1) vorausgesetzt sind.[5]) Nach den Sätzen (A), (B) stimmen (bis auf Isomorphie) die sämtlichen gegenseitigen Schreierschen Erweiterungen $G \bullet \Gamma$ von G und Γ mit denjenigen Gruppen (31) überein, die mit einem $\Gamma \cdot G$ isomorph sind. Wir haben deshalb die Bedingungen aufzustellen, damit (31) eine Gruppe und isomorph mit einem $\Gamma \cdot G$ ist. Es wird sich zeigen, daß das dann und nur dann der Fall ist, wenn es weitere sechs Funktionen $\alpha^\beta, a^\beta, \varrho(\alpha), \sigma(a), r(a), s(\alpha)$ gibt, so daß (1) bis (10) erfüllt sind. Das wird eben die Richtigkeit unseres Satzes bedeuten.

Damit (31) eine Gruppe ist, ist nach Satz (A) notwending und hinreichend, daß ((21) bis (23) d. h.) (3_1) bis (5_1) erfüllt sind. Im übrigen Teil des Beweises dürfen wir also (mit den vorhererwähnten (1_1) (2_1) zusammen) (1_1) bis (5_1) voraussetzen — diese besagen eben, daß $\mathfrak{G}$ in (31) eine Gruppe ist — und dann haben wir nur noch die notwendige und hinreichende Bedingung zu bestimmen, damit ein Isomorphismus

$$\mathfrak{G} \approx \mathfrak{G}' \tag{32}$$

---

[5]) Mit (1_1) bis (9_1) bzw. (1_2) bis (9_2) bezeichnen wir die erste bzw. zweite Hälfte von (1) bis (9).

gilt, wobei $\mathfrak{G}'$ irgendein Schreiersches Produkt

$$\mathfrak{G}' = \Gamma \cdot G \tag{33}$$

bezeichnet.

Der Isomorphismus (32) bedeutet, daß es zwei Funktionen

$$f(a, \alpha) \in G, \quad \varphi(a, \alpha) \in \Gamma \tag{34}$$

gibt, so daß

$$(a, \alpha) \to (\varphi(a, \alpha), f(a, \alpha)) \qquad (f(a, \alpha) \in G, \varphi(a, \alpha) \in \Gamma) \tag{35}$$

eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller (a, α) auf die Menge aller (α, a) ist und die Homomorphieeigenschaft

$$(a, \alpha)(b, \beta) \to (\varphi(a, \alpha), f(a, \alpha))(\varphi(b, \beta), f(b, \beta)) \tag{36}$$

gilt, wobei das Produkt links und rechts in der Gruppe $\mathfrak{G}$ bzw. im Schreierschen Produkt $\mathfrak{G}'$ zu verstehen ist.

Einerseits besagt (35) (wegen (34)), daß die Abbildung

$$(a, \alpha) \to (f(a, \alpha), \varphi(a, \alpha)) \tag{37}$$

eine Permutation der Elemente (11) ist.

Andererseits besagt (36) wegen (17), (24), (35) das Bestehen von

$$\begin{aligned}(\varphi(ab, a^b\alpha^b\beta), f(ab, a^b\alpha^b\beta)) = \\ = (\varphi a, \alpha)\,\varphi(b, \beta), \varphi(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(b, \beta)),\end{aligned} \tag{38}$$

wobei die (in die rechte Seite eingehenden) Funktionen α^β, a^β die Bedingungen ((25), (26) d. h.) (1_2) (2_2) erfüllen (und sonst beliebig sind).

Umgekehrt, wenn (34), (37), (38), (1_2), (2_2) gelten, also die Isomorphie (32) besteht, so muß (mit $\mathfrak{G}$ zusammen auch) $\mathfrak{G}'$ eine Gruppe sein, woraus nach Satz (B′) folgt, daß in diesem Fall notwendig auch ((21) bis (23) d. h.) (3_2) bis (5_2) gelten.

Nach diesen Überlegungen dürfen wir also im folgenden (1) bis (5) voraussetzen, und dann haben wir zu zeigen, daß die sämtlichen Lösungen (34) von (38) gerade die aus den Lösungen (6) von (7) bis (9) entspringenden Funktionen

$$f(a, \alpha) = \sigma(a)^{\varrho(\alpha)} r(a)^{\varrho(\alpha)} s(\alpha), \quad \varphi(a, \alpha) = \sigma(a)\varrho(\alpha) \tag{39}$$

sind. (Dabei haben wir berücksichtigt, daß (37) für (39) eben in (10) übergeht.)

Statt (38) dürfen wir

$$\varphi(ab, a^b\alpha^b\beta) = \varphi(a, \alpha)\varphi(b, \beta), \tag{40}$$

$$f(ab, a^b\alpha^b\beta) = \varphi(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(b, \beta) \tag{41}$$

schreiben.

Wenn wir hier das Tripel b, α, β durch das Tripel e, ε, α ersetzen, so gewinnen wir

$$f(a, \alpha) = \varphi(a, \varepsilon)^{\varphi(e, \alpha)} f(a, \varepsilon)^{\varphi(e, \alpha)} f(e, \alpha), \tag{42}$$

$$\varphi(a, \alpha) = \varphi(a, \varepsilon)\varphi(e, \alpha). \tag{43}$$

Führen wir also die Bezeichnungen

$$\varrho(\alpha) = \varphi(e, \alpha), \quad \sigma(a) = \varphi(a, \varepsilon), \quad r(a) = f(a, \varepsilon), \quad s(\alpha) = f(e, \alpha) \tag{44}$$

ein, so folgt aus (34) das Bestehen von (6), ferner gehen (42), (43) wegen (44) in (39) über.

Hiernach genügt es folgendes zu zeigen: Unter der Annahme (1) bis (6) liefert (39) dann und nur dann eine Lösung von (40), (41), wenn (7) bis (9) gelten.

Gleich bemerken wir, daß wegen (2) aus (40), (41) für $a = b = e$, $\alpha = \beta = \varepsilon$ offenbar $\varphi(e, \varepsilon) = \varepsilon$, $f(e, \varepsilon) = e$, d. h. nach (44)

$$\varrho(\varepsilon) = \sigma(e) = \varepsilon, \quad r(e) = s(\varepsilon) = e \tag{45}$$

folgt.

Setzen wir nun (39) in (40), (41) ein:

$$\sigma(ab)\varrho(a^b\alpha^b\beta) = \sigma(a)\varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta), \tag{46}$$

$$\sigma(ab)^{\varrho(a^b\alpha^b\beta)} r(ab)^{\varrho(a^b\alpha^b\beta)} s(a^b\alpha^b\beta) = \tag{47}$$

$$= (\sigma(a)\varrho(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)}(\sigma(a)^{\varrho(\alpha)} r(a)^{\varrho(\alpha)} s(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)} \sigma(b)^{\varrho(\beta)} r(b)^{\varrho(\beta)} s(\beta).$$

Nach obigem dürfen wir also (1) bis (6), ferner (45) annehmen, und dann haben wir nur zu zeigen, daß die Bedingungen (46), (47) äquivalent mit (7) bis (9) sind.

Wegen (2), (45) gehen (46), (47) für $a = b = e$ bzw. $\alpha = \beta = \varepsilon$ in (7) bzw. (8) über. Wieder wegen (2), (45) gehen ferner dieselben Gleichungen (46), (47) bei Ersetzung des Quadrupels a, b, α, β durch $e, a, \alpha, \varepsilon$ eben in (9) über. Deshalb genügt es, wenn wir zeigen, daß umgekehrt aus (1) bis (9)[6]) die Gleichungen (46), (47) folgen. Wir zeigen sogar, daß (40), (47) eine Folgerung aus (1) und (3) bis (9) ist.

Wegen (7_1) geht die linke Seite von (46) in

$$\sigma(ab)\varrho(a^b)\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)$$

über. Hierfür schreibt sich nach (8_1)

$$\sigma(a)\sigma(b)\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta).$$

Dies stimmt wegen (9_1) in der Tat mit der rechten Seite von (46) überein.

Der entsprechende Beweis für (47) wird viel mühsamer. Dabei werden wir (1) und (6) (ohne Verweis) stets zu berücksichtigen haben, ferner werden wir mehrmals die aus (3_2) bis (5_2) folgende Gleichung

$$\alpha^{\beta\gamma}a^{\beta\gamma}\beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma(\alpha^\beta a^\beta)^\gamma \tag{48}$$

verwenden.

[6]) Die Gleichungen (45) braucht man dabei nicht zu beachten, die übrigens auch schon aus (1) bis (9) folgen.

Nach (7_1) und (7_2) gelten:

$$\varrho(a^b\alpha^b\beta)=\varrho(a^b)\varrho(\alpha^b\beta),$$
$$s(a^b\alpha^b\beta)=\varrho(a^b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(a^b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta).$$

Werden diese in die linke Seite von (47) eingesetzt und wird (48) mit $\sigma(ab), \varrho(a^b), \varrho(\alpha^b\beta), r(ab)$ statt α, β, γ, a verwendet, so geht sie über in:

$$(\sigma(ab)\varrho(a^b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}(\sigma(ab)^{\varrho(a^b)}r(ab)^{\varrho(a^b)})^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(a^b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta).$$

Dies ist wegen (8_1), (3_2) und (8_2) gleich

$$(\sigma(a)\sigma(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}(\sigma(a)^{\sigma(b)}r(a)^{\sigma(b)}r(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta).$$

Durch nochmalige leichte Umformung nach (3_2) und (5_2) gewinnen wir also für die linke Seite von (47) den Ausdruck:

$$\sigma(a)^{\sigma(b)\varrho(\alpha^b\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}(r(a)^{\sigma(b)}r(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta). \tag{49}$$

Wird (5_2) mit $\sigma(a), \varrho(\alpha), \sigma(b)\varrho(\beta)$ statt α, β, γ verwendet, so sieht man nach (3_2), daß sich die rechte Seite von (47) verwandeln läßt in:

$$\sigma(a)^{\varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta)}\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}(r(a)^{\varrho(\alpha)}s(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta). \tag{50}$$

Da nach (7_1) und (9_1)

$$\sigma(b)\varrho(\alpha^b\beta)=\sigma(b)\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)=\varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta) \tag{51}$$

ist, so sind die ersten Faktoren in (49) und (50) einander gleich. Hiernach gilt für (47) die Umformung:

$$\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}(r(a)^{\sigma(b)}r(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta)= \tag{52}$$
$$=\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}(r(a)^{\varrho(\alpha)}s(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta).$$

Die linke Seite läßt sich nach (3_2) und (4_2) leicht verwandeln in:

$$r(a)^{\sigma(b)\varrho(\alpha^b\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}r(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta). \tag{53}$$

Die rechte Seite von (52) verwandelt sich nach (3_2) unter Verwendung von (4_2) mit $r(a), \varrho(\alpha), \sigma(b)\varrho(\beta)$ statt a, β, γ in:

$$r(a)^{\varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta)}\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}s(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta).$$

Die ersten Faktoren hier und in (53) sind wegen (51) gleich, weshalb (für (52) also) für (47) die Umformung

$$\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}r(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta)=\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}s(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta)$$

gilt.

Wird links auf den letzten Faktor (7_2) angewendet, so entsteht nach Kürzung durch $s(\beta)$:

$$\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}r(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}\varrho(\alpha^b)^{\varrho(\beta)}s(\alpha^b)^{\varrho(\beta)}=\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}s(\alpha)^{r(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(b)}r(b)^{\varrho(\beta)} \tag{54}$$

Aus (48) folgen

$$\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)}\varrho(\alpha^b)^{\varrho(\beta)}=(\sigma(b)\varrho(\alpha^b))^{\varrho(\beta)}(\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b)}r(b)^{\varrho(\alpha^b)})^{\varrho(\beta)},$$
$$\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}s(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}=(\varrho(\alpha)\sigma(b))^{\varrho(\beta)}(\varrho(\alpha)^{\sigma(b)}s(\alpha)^{\sigma(b)})^{\varrho(\beta)}.$$

Da ferner nach (7_1) $\varrho(\alpha^b\beta)=\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)$ ist, so folgt aus diesen und aus (54)

$$(\sigma(b)\varrho(\alpha^b))^{\varrho(\beta)}(\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b)}r(b)^{\varrho(\alpha^b)})^{\varrho(\beta)}s(\alpha^b)^{\varrho(\beta)}=$$
$$=(\varrho(\alpha)\sigma(b))^{\varrho(\beta)}(\varrho(\alpha)^{\sigma(b)}s(\alpha)^{\sigma(b)})^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}.$$

Wegen (9_1) sind beiderseits die ersten Faktoren gleich, weshalb sie sich streichen lassen. Wird in der übriggebliebenen Gleichung a statt b geschrieben, so hat man nach (3_2) eben die $\varrho(\beta)$-te Potenz von (9_2) vor sich. Das beweist den Satz.

Wir haben noch die Ergänzung des Satzes zu beweisen. Vor allem gilt nach (A):

$$\Gamma\approx\Gamma', \quad \mathfrak{G}/\Gamma'\approx G. \tag{55}$$

Ferner haben wir im Beweis des Satzes gesehen, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch (35) isomorph auf eine Gruppe $\Gamma\cdot G$ abgebildet wird. Für diese gilt nach Satz (A'):

$$G_0\approx G, \quad (\Gamma\cdot G)/G_0\approx\Gamma, \tag{56}$$

wobei G_0 der aus den Elementen (ε, a) bestehende Normalteiler von $\Gamma\cdot G$ ist. Bei der isomorphen Abbildung (35) bilden also die Urbilder der Elemente (ε, a) einen Normalteiler G_1 von $\mathfrak{G}$, wofür

$$G_1\approx G, \quad \mathfrak{G}/G_1\approx\Gamma \tag{57}$$

gelten. Wegen (35) besteht G_1 aus denjenigen (a, α), für die

$$\varphi(a, \alpha)=\varepsilon$$

gilt. Diese Bedingung stimmt nach (39_2) mit

$$\sigma(a)\varrho(\alpha)=\varepsilon.$$

überein. Somit ist $G_1=G'$, weshalb (55), (57) eben die Richtigkeit von (14) besagen.

Ferner ist klar, daß ϑ in (15) aus den (e, α) mit

$$\sigma(e)\varrho(\alpha)=\varepsilon \tag{58}$$

besteht. Da aber aus (2_1), (7_1), (8_1) $\varrho(\varepsilon)=\sigma(e)=\varepsilon$ folgt, (was wir übrigens auch aus (45_1) wissen), so stimmt (58) mit (16) überein. Das beweist die Ergänzung des Satzes.

Bemerkung bei der Korrektur. Die Verfasser beabsichtigen sich mit dem entsprechenden Problem der gegenseitigen Ringerweiterungen andermal zu beschäftigen.

(Eingegangen am 10. Juli 1954.)

Über die Ringe mit gegebenem Modul.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Für einen Ring R bezeichnen wir mit R^+ den Modul von R, d. h. den durch die Elemente von R gebildeten Modul.

Oft steht man vor dem Problem, einen gegebenen Modul durch passende Definition einer Multiplikation

$$\alpha\beta(\in M) \qquad (\alpha, \beta \in M)$$

zu einem Ring zu machen, d. h. die Ringe R mit der Eigenschaft

$$R^+ = M \tag{1}$$

zu bestimmen. Jeden solchen Ring R nennen wir einen *auf dem Modul* M *aufgebauten Ring.* Als klassisches Beispiel können wir die Algebren nennen die nämlich auf einem Vektorraum aufgebaute Ringe sind (ausgestattet mit gewissen Operatoreigenschaften). BEAUMONT[1]) hat unlängst einen anderen, wichtigen Fall erledigt, wo nämlich M die direkte Summe von zyklischen Moduln ist. In beiden dieser Fälle hat M eine Basis, obwohl in verschiedenem Sinne. Wir wollen das Problem allgemeiner lösen, indem wir für M einen Operatormodul zulassen und in diesem die Existenz einer Basis nicht annehmen. Um das Fehlen einer Basis zu ersetzen, werden wir ein System erzeugender Elemente für M zu Hilfe nehmen, was natürlich keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Es sei also M ein Operatormodul über einem Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement e als Operatorbereich. Die Operation bezeichnen wir als linksseitiges Operatorprodukt:

$$a\alpha(\in M) \qquad (a \in \mathfrak{R}, \alpha \in M). \tag{2}$$

Dabei sollen die üblichen Operatoreigenschaften

$$e\alpha = \alpha, \tag{3}$$

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta, \tag{4}$$

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{5}$$

$$ab\alpha = a(b\alpha) \tag{6}$$

gelten. (Die linke Seite von (6) bedeutet $(ab)\alpha$. Allgemeiner soll $ab \cdots r\alpha\beta \cdots \varrho = (ab \cdots r)(\alpha\beta \cdots \varrho)$ sein.)

---

[1]) R. A. BEAUMONT, Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups, *Duke Math. Journal,* 15 (1948), 367—369.

Als Lösungen unseres Problems betrachten wir dann alle Ringe R, für die außer (1) auch noch die (ebenfalls übliche) Operatoreigenschaft

$$a\alpha\beta = a\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot a\beta \tag{7}$$

gilt.

Wie gesagt, nehmen wir in M ein System von erzeugenden Elementen zu Hilfe, das wir kurz durch

$$\omega_i \tag{8}$$

angeben, wobei i die Elemente einer „Indexmenge" $\mathfrak{J}$ durchläuft. (Wie i, so auch j, k, r, s, t sollen stets Elemente von $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Diese werden auch als „oberer Index" verwendet. Exponenten zur Bezeichnung von Potenzen werden in dieser Arbeit gar nicht gebraucht.) Die über (8) gemachte Annahme soll bedeuten, daß sich alle Elemente von M als

$$a^i\omega_i \tag{9}$$

schreiben lassen, wobei das gleichzeitige Auftreten von i als oberer und unterer Index bedeutet, daß man für alle i ($\in \mathfrak{J}$) zu summieren hat (wie das in der Tensorrechnung üblich ist); selbst a^i bezeichnet für jedes i ein Element von $\mathfrak{R}$ mit der Einschränkung, daß unter allen a^i ($i \in \mathfrak{J}$) nur endlich viele von 0 verschiedene Elemente vorkommen. (Diese Bedeutung von a^i soll für die ganze Arbeit beibehalten werden, ferner sollen auch $b^i, b^j, \ldots$ von ähnlicher Bedeutung sein.)

Wir bemerken folgendes. Ist in M eine (beiderseits) distributive Multiplikation definiert, so gilt wegen (6), (7) für das Produkt von zwei beliebigen Elementen von M offenbar

$$a^i\omega_i\cdot b^j\omega_j = a^i b^j \omega_i\omega_j. \tag{10}$$

Gibt man ferner alle Produkte $\omega_i\omega_j$ nach (9) als

$$\omega_i\omega_j = c_{ij}^k\omega_k \tag{11}$$

an, so schreibt sich (10) wegen (4), (5), (6) als

$$a^i\omega_i\cdot b^j\omega_j = a^i b^j c_{ij}^k \omega_k. \tag{12}$$

Dabei bezeichnen die c_{ij}^k Elemente von $\mathfrak{R}$, unter denen für jedes Paar i, j ($\in \mathfrak{J}$) nur endlich viele von 0 verschieden sind. Solche Elemente c_{ij}^k nennen wir im allgemeinen *Strukturkonstanten*.

Hiernach können wir unser Problem endgültig so formulieren: Welchen Bedingungen müssen die Strukturkonstanten c_{ij}^k unterworfen sein, damit durch die Multiplikation (12) ein auf dem Modul M aufgebauter Ring definiert ist, wofür auch (7) gilt.

Um die Antwort formulieren zu können, nehmen wir den aus allen Systemen a^i bestehenden $\mathfrak{R}$-Vektorraum $\mathfrak{V}$ zu Hilfe, in dem wir nämlich die Addition und das Operatorprodukt durch

$$(a^i) + (b^i) = a^i + b^i, \tag{13}$$

$$c(a^i) = ca^i \qquad (c \in \mathfrak{R}) \tag{14}$$

definieren. (Die Dimension von $\mathfrak{B}$ ist gleich der Mächtigkeit von $\mathfrak{J}$.) Diejenigen a^i, für die (9) gleich 0 ist, bilden offenbar einen Untermodul von $\mathfrak{B}$, den wir mit $\mathfrak{B}_0$ bezeichnen. Da wegen (4), (6) $c(a^i\omega_i) = ca^i\omega_i$ gilt, so folgt aus $a^i \in \mathfrak{B}_0$ auch $ca^i \in \mathfrak{B}_0$. Dies schreibt sich nach (14) als $c(a^i) \in \mathfrak{B}_0$. Hiernach ist der Untermodul $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ zuläßig. Wir nennen $\mathfrak{B}_0$ den *annullierenden* Modul (des Erzeugendensystems ω_i). Für ihn gilt offenbar die Isomorphie:

$$\mathsf{M} \approx \mathfrak{B}/\mathfrak{B}_0.$$

Nunmehr bewisen wir den folgenden:

S a t z. *Damit im Modul* M *durch* (12) *eine eindeutige Multiplikation definiert wird, ist notwendig und hinrechend, daß*

$$(15) \qquad a^i c_{ir}^j,\ a^i c_{ri}^j \in \mathfrak{B}_0 \qquad (a^i \in \mathfrak{B}_0,\ r \in \mathfrak{J})$$

ist. Ist das der Fall, so ist die Multiplikation (12) *auch schon distributiv; ferner ist für die Assoziativität notwendig und hinrechend, daß*

$$(16) \qquad c_{rs}^i c_{it}^j - c_{st}^i c_{ri}^j \in \mathfrak{B}_0 \qquad (r, s, t \in \mathfrak{J})$$

ist. Hiernach sind (15), (16) *notwendig und hinrechend, damit die Multiplikation* (12) *einen auf* M *aufgebauten Ring* R *definiert. Für einen solchen Ring gilt die Operatoreigenschaft* (7) *dann und nur dann, wenn*

$$(17) \qquad (ab - ba)c_{rs}^i \in \mathfrak{B}_0 \qquad (a, b \in \mathfrak{R};\ r, s \in \mathfrak{J})$$

ist.

B e m e r k u n g. Kurz gesprochen besagt dieser Satz, daß die den Bedingungen (15), (16), (17) befriedigenden Strukturkonstanten c_{ij}^k die sämtlichen Lösungen unseres Problems liefern.

B e w e i s. Die Forderung der Eindeutigkeit der Multiplikation (12) bedeutet, daß die rechte Seite nur von den beiden Faktoren der linken Seite abhängt. Das ist offenbar dann und nur dann der Fall, wenn insbesondere

$$(18) \qquad a^i\omega_i \cdot \omega_r = 0, \quad \omega_r \cdot a^i\omega_i = 0 \qquad (a^i \in \mathfrak{B}_0,\ r \in \mathfrak{J})$$

gelten. Da nach (3) $\omega_r = e\omega_r$ ist, so lassen sich die Gleichungen (18) nach (12) in der Form

$$a^i c_{ir}^j \omega_j = 0, \quad a^i c_{ri}^j \omega_j = 0$$

schreiben. Hieraus sieht man die Richtigkeit der Behauptung über (15).

Nunmehr nehmen wir (15) an. Aus (4), (5), (6) folgt, daß die Multiplikation (12) auch schon distributiv ist. Ferner folgt hieraus, daß Assoziativität dann und nur dann vorliegt, wenn für die Erzeugenden von M

$$\omega_r\omega_s \cdot \omega_t = \omega_r \cdot \omega_s\omega_t \qquad (r, s, t \in \mathfrak{J})$$

gilt. Diese Gleichung schreibt sich nach (12) zunächst als

$$c_{rs}^i \omega_i \cdot \omega_t = \omega_r \cdot c_{st}^i \omega_i,$$

dann als

$$c_{rs}^i c_{it}^j \omega_j = c_{st}^i c_{ri}^j \omega_j,$$

d. h. wegen (5) als

$$(c^i_{rs} c^j_{it} - c^i_{st} c^j_{ri}) \omega_j = 0.$$

Dies besagt dasselbe wie (16), weshalb wir nur noch die Behauptung über (17) zu beweisen haben.

In unserem Ring R ist (7) wegen (3) bis (6) und (12) offenbar dann und nur dann erfüllt, wenn insbesondere

$$a(b\omega_r \cdot \omega_s) = b\omega_r . \, a\omega_s$$

gilt. Dies schreibt sich wieder nach (12) als

$$a(bc^i_{rs}\omega_i) = bac^i_{rs}\omega_i,$$

d. h. nach (6) und (5) als

$$(ab - ba)c^i_{rs}\omega_i = 0.$$

So sind wir eben zur Bedingung (17) gekommen. Das beendet den Beweis des Satzes.

1. Beispiel. Es sei M ein Vektorraum über $\mathfrak{K}$ und ω_i $(i \in \mathfrak{J})$ eine Basis von M. Für diesen Fall werden durch den Satz eben die auf dem Vektorraum M aufgebauten Algebren R über $\mathfrak{K}$ charakterisiert. Da jetzt $\mathfrak{B}_0 = 0$ ist, so ist (15) trivial erfüllt. Die übriggebliebenen (16), (17) sind eben die bekannten Bedingungen, damit durch (12) wirklich eine Algebra R definiert wird. (Ist dabei der Grundring $\mathfrak{K}$ kommutativ, so bleibt (17) weg. Das ist bekanntlich stets der Fall, wenn man fordert, daß R ein Einselement hat.)

2. Beispiel. Es sei $\mathfrak{K}$ der Ring der ganzen Zahlen (d. h. M ein „Modul ohne Operatoren"), ferner sei M die direkt Summe von zyklischen Moduln:

$$\mathrm{M} = \sum_{i \in \mathfrak{J}} \{\omega_i\},$$

wobei $\{\omega_i\}$ den durch ω_i erzeugten Modul bezeichnet. Mit anderen Worten ist ω_i $(i \in \mathfrak{J})$ eine Basis von M. Man definiere $o(\alpha)$ $(\alpha \in \mathrm{M})$ als das nichtnegative Erzeugende des durch diejenigen ganzen Zahlen a gebildeten Ideals, für die $a\alpha = 0$ ist. Man nennt $o(\alpha)$ die *Ordnung von α.* Für diesen Fall besteht $\mathfrak{B}_0$ aus denjenigen Systemen $a^i (a^i \in \mathfrak{K},\ i \in \mathfrak{J})$, für die

$$o(\omega_i) | a^i \qquad (i \in \mathfrak{J})$$

gilt. Folglich lauten jetzt die Bedingungen (15), (16) des Satzes so:

(19) $$o(\omega_j) | o(\omega_i) c^j_{ir},\ o(\omega_i) c^j_{ri} \qquad (i, j, r \in \mathfrak{J}),$$

(20) $$o(\omega_j) | c^i_{rs} c^j_{it} - c^i_{st} c^j_{ri} \qquad (j, r, s, t \in \mathfrak{J}).$$

(Die Bedingung (17) ist wegen der Kommutativität von $\mathfrak{K}$ trivial erfüllt.) Diese Bedingungen (19), (20) drücken eben den erwähnten Satz von BEAUMONT [1]) aus.

(Eingegangen am 20. August 1954.)

On a problem of Sidon in additive number theory.

By P. ERDŐS in Notre Dame (Indiana, U. S. A.)

To the memory of S. Sidon.

Let $0 < a_1 < a_2 \ldots$ be an infinite sequence of positive integers. Denote by $f(n)$ the number of solutions of $n = a_i + a_j$. About twenty years ago, SIDON[1]) raised the question wether there exists a sequence a_i satisfying $f(n) > 0$ for all $n > 1$ and $\lim f(n)/n^\varepsilon = 0$ for all $\varepsilon > 0$. In the present note, I will construct such a sequence. In fact, my sequence will satisfy

$$0 < f(n) < c_1 \log n \tag{1}$$

for all $n > 1$. (The c's will denote suitable positive absolute constants.)

It seems probable that (1) can not be strengthened very much. TURÁN and I conjectured[2]) that if $f(n) > 0$ for all $n > n_0$ then $\limsup f(n) = \infty$; this conjecture seems very hard to prove. A still stronger conjecture would be the following: Let $a_1 < a_2 < \cdots$ be an infinite sequence of integers satisfying $a_k < ck^2$. Then $\limsup f(n) = \infty$.

We will not be able to construct our sequences explicitely, but we will be able to show that in some sense almost all sequences satisfy (1). The idea of our construction is the following. Define A_k as the least integer greater than $c_2 k^{1/2} 2^{k/2}$. Pick in all possible ways A_k integers from the interval $(2^k, 2^{k+1})$. One can do this in $\binom{2^k}{A_k}$ ways. One thus obtains the integers $b_1^{(k)} < b_2^{(k)} < \cdots < b_{A_k}^{(k)}$. I will show that if for each k one neglects $o\binom{2^k}{A_k}$ "bad" choices of the $b_i^{(k)}$ and forms a sequence $a_1 < a_2 < \cdots$ from any of the "good" choices of the $b_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqq i \leqq A_k$) the sequence $a_1 < a_2 < \cdots$ will satisfy (1). Thus roughly speaking (1) will be satisfied for almost all choices of the $b_i^{(k)}$. We have to make one more remark. For small values of k it may happen that $c_2 2^{k/2} k^{1/2} > 2^k$. In this case the $b_i^{(k)}$ are simply all the integers of the interval $(2^k, 2^{k+1})$. Also, it is clearly enough to show that $f(n) > 0$ for all

[1]) Oral communication.

[2]) P. ERDŐS and P. TURÁN, On a problem of Sidon in additive number theory, and on some related problems, *Journal London Math. Soc.*, 16 (1941), 212—215.

$n > n_0$, for if $f(n) > 0$ for all $n > n_0$ we can simply adjoin all $n < n_0$ to the a's and the new sequence satisfies $f(n) > 0$ for all $n > 1$ and $f(n) < c_1 \log n + n_0 < c_3 \log n$.

First we state and prove some simple inequalities on binomial coefficients which we will need later.

Let u, v, x and l be integers, $x < u$ and $x < v$. Denote by l_1 the greatest integer less than $ux/8(u+v)$ and by $2l_2$ the least even integer greater than $4rux/(u+v)$ $(r>1)$. We have

$$\sum_{l=0}^{l_1} \binom{u}{l}\binom{v}{x-l} < \frac{2}{2^{l_1}}\binom{u+v}{x}, \tag{2}$$

$$\sum_{l=2l_2}^{x} \binom{u}{l}\binom{v}{x-l} < \frac{1}{1-\frac{1}{r}} \cdot \frac{1}{r^{l_2}}\binom{u+v}{x}. \tag{3}$$

A simple computation shows that for $l \leqq 2l_1$

$$\binom{u}{l}\binom{v}{x-l} < \frac{1}{2}\binom{u}{l+1}\binom{v}{x-l-1}.$$

Thus

$$\sum_{l=0}^{l_1} \binom{u}{l}\binom{v}{x-l} < 2\binom{u}{l_1}\binom{v}{x-l_1} < \frac{2}{2^{l_1}}\binom{u}{2l_1}\binom{v}{x-2l_1} <$$

$$< \frac{2}{2^{l_1}}\sum_{l=0}^{x}\binom{u}{l}\binom{v}{x-l} = \frac{2}{2^{l_1}}\binom{u+v}{x},$$

which proves (2). Again by a simple computation we have for $l \geqq l_2$

$$\binom{u}{l}\binom{v}{x-l} > r\binom{u}{l+1}\binom{v}{x-l-1}.$$

Thus

$$\sum_{l=2l_2}^{x}\binom{u}{l}\binom{v}{x-l} < \frac{1}{1-\frac{1}{r}}\binom{u}{2l_2}\binom{v}{x-2l_2} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{r}\right)r^{l_2}}\binom{u}{l_2}\binom{v}{x-l_2} <$$

$$< \frac{1}{\left(1-\frac{1}{r}\right)r^{l_2}}\sum_{l=0}^{x}\binom{u}{l}\binom{v}{x-l} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{r}\right)r^{l_2}}\binom{u+v}{x},$$

which proves (3).

Now we can start to prove our Theorem. First of all, we show that for all but $o\binom{2^k}{A_k}$ choices of the $b_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots; 1 \leqq i \leqq A_k)$, $f(n) > 0$ for all $n > 1$. Assume that we already have chosen the $b_i^{(l)}$ $(1 \leqq l < k;\ 1 \leqq i \leqq A_l)$ so that $f(n) > 0$ for all $n < 2^{k-1} + 2^k$. Then we show that for all but $o\binom{2^k}{A_k}$ choices of the $b_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq A_k)$, we have $f(n) > 0$ for all n satisfying $2^{k-1} + 2^k \leqq n < 2^k + 2^{k+1}$.

Assume first

$$2^{k-1}+2^k \leqq n < 2^{k-2}+2^{k+1}. \tag{4}$$

If $f(n)=0$ then clearly none of the integers

$$n-b_j^{(k-2)}\ (1\leqq j\leqq A_{k-2})$$

could be $b_i^{(k)}$'s. Since by construction $2^{k-2}\leqq b_j^{(k-2)}<2^{k-1}$, all the $n-b_j^{(k-2)}$ are in $(2^k, 2^{k+1})$. Thus the number of possible choices of $b_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq A_k)$ for which $f(n)=0$ is certainly not greater than

$$\binom{2^k-A_{k-2}}{A_k}.$$

Thus the number of possible choices of the $b_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq A_k)$ so that $f(n)=0$ for at least one n satisfying (4) is less than

$$2^k\binom{2^k-A_{k-2}}{A_k}=2^k\binom{2^k}{A_k}\frac{(2^k-A_k)(2^k-A_k-1)\cdots(2^k-A_k-A_{k-2}+1)}{2^k(2^k-1)\cdots(2^k-A_{k-2}-1)}<$$

$$<2^k\binom{2^k}{A_k}\left(1-\frac{A_k}{2^k}\right)^{A_{k-2}}<2^k\binom{2^k}{A_k}\exp\left(-\frac{A_kA_{k-2}}{2^k}\right)<2^k\binom{2^k}{A_k}\exp\left(-\frac{c_2^2}{4}k\right)=o\binom{2^k}{A_k}$$

for $c_2>4$, which proves our assertion if (4) holds.

Assume next

$$2^{k-2}+2^{k+1}\leqq n<2^k+2^{k+1}. \tag{5}$$

If $2^k\leqq x<2^{k-3}+2^k$ then only one of the numbers x and $n-x$ can be a $b_i^{(k)}$ (otherwise $f(n)>0$). Assume that there are l $b_i^{(k)}$'s in $(2^k, 2^{k-3}+2^k)$ where l can take the values $0, 1, \ldots, A_k$. Then by what has been just said none of the numbers $n-b_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq l)$ can be $b_i^{(k)}$'s [these numbers $n-b_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq l)$ are all in $(2^{k-3}+2^k, 2^{k+1})$]. Thus the number of possible choices of the $b_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq A_k)$ so that $f(n)=0$ for a fixed n satisfying (5) is less than or equal to

$$\sum_{l=0}^{A_k}\binom{2^{k-3}}{l}\binom{2^k-2^{k-3}-l}{A_k-l}=\Sigma_1+\Sigma_2 \tag{6}$$

where in Σ_1 $l<A_k/64$ and in Σ_2 $l\geqq A_k/64$.

We obtain from (2) by putting $u=2^{k-3}$, $v=2^k-2^{k-3}$, $x=A_k$, $l_1=[A_k/64]$:

$$\Sigma_1<\sum_{l<A_k/64}\binom{2^{k-3}}{l}\binom{2^k-2^{k-3}}{A_k-l}<\frac{2}{2^{A_k/64}}\binom{2^k}{A_k}=o\left(\frac{1}{2^k}\right)\binom{2^k}{A_k}. \tag{7}$$

Further

$$\Sigma_2=\sum_{l\geqq A_k/64}\binom{2^{k-3}}{l}\binom{2^k-2^{k-3}-l}{A_k-l}<\sum_{l=0}^{A_k}\binom{2^{k-3}}{l}\binom{2^k-2^{k-3}}{A_k-l}\left(1-\frac{A_k}{64\cdot 2^k}\right)^{A_k/64}.$$

The last step follows from $\binom{u}{t}\left(1-\frac{l}{u}\right)^l>\binom{u-l}{t}$ (in our case $u=2^k-2^{k-3}$, $l\geqq A_k/64$). Thus for $c_2>8$

$$\Sigma_2<\binom{2^k}{A_k}\left(1-\frac{A_k}{64\cdot 2^k}\right)^{A_k}<\binom{2^k}{A_k}\exp\left(-\frac{A_k^2}{64\cdot 2^k}\right)=o\left(\frac{1}{2^k}\right)\binom{2^k}{A_k}. \tag{8}$$

From (7) and (8) we have $\Sigma_1+\Sigma_2=o\left(\frac{1}{2^k}\right)\binom{2^k}{A_k}$. Thus, if (5) holds, then for all but $o\binom{2^k}{A_k}$ choices of the $b_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq A_k)$ we have $f(n)>0$.

Since (4) and (5) cover the interval $(2^{k-1}+2^k, 2^k+2^{k+1})$, the proof of our assertion is complete, that is if we form a sequence $a_1=1<a_2<\cdots$ from the "good" choices of the $b_i^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots;\ 1\leqq i\leqq A_k)$, then we have $f(n)>0$ for all $n>1$.

Now to complete our proof we have to show that for all but $o\binom{2^k}{A_k}$ choices of the $b_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq A_k, 1\leqq k<\infty)$ we have

(9) $$f(n)<c_1\log n.$$

To show (9) it will clearly suffice to show that except for $o\binom{2^k}{A_k}$ choices of the $b_i^{(k)}$ for all n the number of solutions of

(10) $$n=b_i^{(k)}+b_j^{(r)}\quad(1\leqq i\leqq A_k,\ 1\leqq j\leqq A_r,\ 1\leqq r\leqq k-1)$$

is less than $c_1\log n/2$, and that except for $o\binom{2^k}{A_k}$ choices of the $b_i^{(k)}$ the number of solutions of

(11) $$n=b_{i_1}^{(k)}+b_{i_2}^{(k)}\quad(1\leqq i_1, i_2\leqq A_k)$$

is for all n less than $c_1\log n/2$. (A simple argument shows that (10) and (11) imply (9)).

First we deal with (10). We clearly can assume that

$$2^k<n\leqq 2^k+2^{k+1}$$

(i. e. $b_j^{(r)}\leqq 2^k$, $2^k<b_i^{(k)}\leqq 2^{k+1}$). Consider the numbers $n-b_j^{(r)}$ $(1<j<A_r,$ $1\leqq r\leqq k-1)$. Suppose that z of them are in the interval $(2^k, 2^{k+1})$. We evidently have

$$z\leqq A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}<4c_2k^{1/2}2^{k/2}.$$

If (10) is to have not less than $c_1\log n/2$ solutions, then at least $c_1\log n/2$ of these numbers $n-b_j^{(r)}$ must be $b_i^{(k)}$'s. Thus since $c_1\log n/2>c_1k/4$, the number of possible choices of the $b_i^{(k)}$ for which (10) has more than $c_1\log n/2$ solutions is not greater than

$$\sum_{l>c_1k/4}\binom{z}{l}\binom{2^k-z}{A_k-l}.$$

Now use (3) with $x=A_k, u=z, v=2^k-z, l_2=c_1k/8$. Further by the definition of r

$$\left[\frac{4rzA_k}{2^k}\right]=\left[\frac{c_1k}{4}\right]\quad\text{or}\quad r>2\quad\text{for}\quad c_1>126c_2^2.$$

Thus by (3) for $c_1>8$

$$\sum_{l>c_1k/4}\binom{z}{l}\binom{2^k-z}{A_k-l}<\frac{2}{2^{c_1k/8}}\binom{2^k}{A_k}=o\left(\frac{1}{2^k}\right)\binom{2^k}{A_k}.$$

Thus the number of choices of the $b_i^{(k)}$ for which (10) has for at least one n $(2^k < n < 2^k + 2^{k+1})$ more than $c_1 \log n/2$ solutions is $o\binom{2^k}{A_k}$ as stated.

To complete our proof we finally investigate (11). Here we clearly can assume $2^{k+1} \leqq n < 2^{k+2}$. If for some n (11) has more than $c_1 \log n/2$ solutions we must have

$$n = b_{i_1}^{(k)} + b_{i_2}^{(k)} = b_{i_3}^{(k)} + b_{i_4}^{(k)} = \cdots = b_{i_{2t-1}}^{(k)} + b_{i_{2t}}^{(k)}, \qquad t = \left[\frac{c_1 k}{4}\right] (< c_1 \log n/2).$$

(We can ignore the solution $2b_i^{(k)} = n$.) There clearly are $\binom{2^k}{t}$ possible choices for the $b_{2r-1}^{(t)}$, $1 \leqq r \leqq t$; the $b_{2r}^{(t)}$ are then determined, and for the remaining $b_i^{(k)}$ there are $\binom{2^k - 2t}{A_k - 2t}$ possible choices. Thus, if the number of possible choices for the $b_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq A_k)$ for which (11) has, for at least one n, $2^{k+1} \leqq n < 2^{k+2}$, more than $c_1 \log n/2$ solutions, is not greater than

$$2^{k+1}\binom{2^k}{t}\binom{2^k-2t}{A_k-2t} < 2^{k+1}\frac{2^{kt}}{t!}\left(\frac{2^k}{A_k}\right)^{-2t}\binom{2^k}{A_k} =$$

$$= \binom{2^k}{A_k}\frac{2^{k+1}}{t!}\,\frac{A_k^{2t}}{2^{kt}} < \binom{2^k}{A_k}\frac{2^{k+1}}{t!}(c_2^2 k)^k = o\binom{2^k}{A_k}$$

for sufficiently large c_1, $t = \left[\frac{c_1 k}{4}\right]$. Thus our theorem is completely proved.

UNIVERSITY OF NOTRE DAME.

(Received February 22, 1954.)

Ein Zusammenhang zwischen den Funktionenklassen Lip α und Lip (β, p).

Von GÉZA FREUD in Budapest.

Es sei $f(x) \in L$ eine nach 2π periodische Funktion und $f \in \mathrm{Lip}(\beta, p)$, d. h.

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = O(h^\beta),$$

mit $1 < p \leqq 2$ und $\beta - \frac{1}{p} > 0$. Nach einem bekannten Satze von O. SZÁSZ[1] ist die Fouriersche Reihe von $f(x)$ für jedes x absolut konvergent. Da eine absolut konvergente Fourier-Reihe eine stetige Funktion darstellt, ist somit $f(x)$ fast überall gleich einer stetigen Funktion $g(x)$. Wir zeigen, daß diese stetige Funktion sogar einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Satz. *Es sei $f \in L$ eine nach 2π periodische Funktion, $f \in \mathrm{Lip}(\beta, p)$ mit*

$$1 < p \leqq 2 \quad \textit{und} \quad \beta \leqq 1, \beta - \frac{1}{p} > 0.$$

Dann ist $f(x)$ fast überall gleich einer Funktion $g(x)$, welche jeder Klasse Lip α *mit* $0 < \alpha < \beta - \frac{1}{p}$ *zugehört.*

Beweis. Es sei

$$f(x) \sim \Sigma (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

und

$$g(x) \equiv \Sigma (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, daß für jedes α mit $0 < \alpha < \beta - \frac{1}{p}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$[2]

Ist also $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der betrachteten Fourier-Reihe, dann ist

$$|g(x) - s_n(x)| = O(n^{-\alpha}).$$

Hieraus folgt nach einem wohlbekannten Satze von S. N. BERNSTEIN, daß $g \in \mathrm{Lip}\, \alpha$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 27. September 1954.)

[1]) O. SZÁSZ, Über die Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, *Math. Annalen*, 100 (1928), 530—536.

[2]) Vgl. A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 143, Beispiel 6.

Bibliographie.

Trygve Nagell, Introduction to number theory, 309 pages, Almqvist & Wiksell, Stockholm — John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

Ein mit großer Liebe und Schriftkunst geschriebenes Buch von einem echten Zahlentheoretiker. Wohl trägt das Buch den Titel einer Einführung, dem es auch getreu bleibt, so führt es doch trotz seines ermäßigten Umfanges auch an einige hohe Gipfel der neuen zahlentheoretischen Untersuchungen hinauf.

Die erste Hälfte des Buches enthält in vier Kapiteln die wichtigsten Elemente der Zahlentheorie ungefähr mit dem gewohnten Inhalt, nämlich die Teilbarkeitslehre, Theorie der Kongruenzen, das quadratische Reziprozitätsgesetz, doch wurden auch schon in dem hier verarbeiteten Lehrstoff mehrere Einzeluntersuchungen aufgenommen, die weniger für die Grundlegung nötig, aber an sich interessant und somit geeignet sind, durch ihren Reiz die Begeisterung des Lesers für die Zahlentheorie zu erwecken. Solche Teile sind: Beweis der Irrationalität von e und π nach NIVEN, die ganzwertigen Polynome, THUES Satz über die Representation der Restklassen mod p durch rationale Zahlen, einige Spezialfälle des Dirichletschen Satzes über die arithmetische Progression, Verf.-s eigene, auch von O. ORE gewonnene Resultate über die Anzahl der Lösungen der Kongruenzen höheren Grades mod p^{α}. [Ref. bemerkt hierzu die wesentlichen Verschärfungen dieser Resultate bei GY. SÁNDOR, Über die Anzahl der Lösungen einer Kongruenz, *Acta Math.*, **87** (1952), 13—16.] Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit den komplexen Einheitswurzeln, insbesondere mit der Irreduzibilität und den Primteilern des Kreisteilungspolynoms, dem Spezialfall $ny-1$ des Dirichletschen Satzes nach BAUER's Verfahren, der Berechnung der Gaußschen Summen. Das sechste und siebente Kapitel sind den Diophantischen Gleichungen zweiten bzw. höheren Grages gewidmet, wo im letzteren teils auch Lösungen in algebraischen Zahlkörpern zugelassen werden. Hier werden viele klassische Gleichungen ($x^2-Dy^2=1, C$; $ax^2+by^2+cz^2=0$; $x^4-y^4=z^2$; $x^3+y^3+z^3=0$; $x^7+y^7+z^7=0$, usw.) erörtert ($x^2-Dy^2=-1$ wenig gestreift). Außerdem bereichtet Verf. hier (größtenteils ohne Beweis) auch über seine eigenen, teils durch seine Schule fortgesetzten feinen Untersuchungen über die allgemeine binäre kubische Gleichung dritten Grades, ferner über den diesbezüglichen Satz von MORDELL und über die Sätze von THUE—SIEGEL—MAILLET bezüglich der Gitterpunkte von algebraischen Kurven höheren Grades. Es ist zu bedauern, daß Verf. diesen interessanten Bericht nicht mit ausführlichen bibliographischen Angaben begleitet, sondern nur die Namen der einzelnen Forscher und die Jahreszahl der Forschungen angibt. Das letzte Kapitel reproduziert den berühmten elementeren Beweis von SELBERG für den Primzahlsatz. Leider wird dabei weder der Anteil von ERDŐS an dem ersten Selbergschen Beweis, noch seine diesbezügliche Arbeit erwähnt [P. ERDŐS, On a new method in elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci, U. S. A.*, **35** (1949), 374—384]. Hierüber s. man auch das Referat von A. E. INGHAM in *Math. Reviews*, **10** (1949), 595—596.

Das ganze Buch ist in sehr klarem Styl gehalten, das Aneignen des Lehrstoffes wird durch viele Beispiele erleichtert. Viele Anmerkungen im Text, ferner den einzelnen Kapiteln angefügten insgesamt 180 Aufgaben von verschiedener Schwere erhöhen den Wert beträchtlich und tragen viel dazu bei, daß das Buch neben seinem Hauptzweck, eine Einführung in die Zahlentheorie zu geben, ein nützliches Werk auch für die Fachmänner ist. Auch die Ausstattung des Buches ist sehr geschmacksvoll.

L. R.

Rédei László, Algebra. I. kötet [**L. Rédei, Algebra.** vol. I], 639 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1954. (Hungarian.)

Although systematic abstract algebra can look back only at a past of hardly four decades, yet, following the traces of the pioneering work of VAN DER WAERDEN, there is already a great number of excellent works discussing from different viewpoints the chapters comprising multifarious investigations of abstract algebra. RÉDEI's book brings a new colour into this literature of rich variety from several points of view. Characteristic of the book is the striving after a systematisation of highest degree, the exquisite realisation of which has been no little task considering the extensive material treated in the work. After having introduced the necessary notions, every problem is treated in the most general manner, it is only afterwards that the author passes to the consideration of special cases. His book gives very much new in its contents, and exposes several results that have not been treated as yet in textbooks. In addition, there is much new in its method and way of treatment too. The author's style is concise but clear; the conciseness never affecting intelligibility. The beginner too, will understand the book without difficulty. For the specialist, on the other hand, RÉDEI's work will play the role of a most serviceable handbook.

The first chapter contains the fundamentals of set theory, which are made use of later on. After exposing the elementary notions and some elementary facts concerning them, certain equivalents of the axiom of choice are treated especially dwelling upon the significance of the lemma of KURATOWSKI—ZORN, the lemma of TEICHMÜLLER—TUKEY and the well-ordering theorem of ZERMELO for the investigations on modern algebra.

The second chapter deals with the general discussion of certain algebraic structures, namely with semigroups (abstract sets with an associative multiplication), groups, rings and (skew) fields. Attention must be drawn to the clear definition of the notions of generating system, minimal generating system and basis. The latter is defined for commutative semigroups with unit element (groups), as an independent generating system of the structure. After the discussion of sub-structures follows the introduction of isomorphism and homomorphism, and the notion of compatible classification with help of which the factor-structures and the general homomorphism theorem, as special cases the notions of normal subgroup and ideal are obtained. This chapter contains the definition of the Rédeian skew product of structures, which means a new structure obtained in a certain way from other structures. This construction is immediately made use of for the extension with unit element of a ring, and for the construction of factor- and difference-structures. The chapter ends with the discussion of the two isomorphism theorems, the lemma of ZASSENHAUS and the theorem of JORDAN—HÖLDER—SCHREIER.

In respect of contents and treatment alike, one of the chapters of greatest originality is the third, which discusses structures with operators. After the exposition of fundamental properties a construction of skew product throws light upon the fact that the usual conditions for operators are the only possible natural conditions. The theory of the Schreier extension of structures is also treated with the use of skew product at the same time for groups and rings. In the first case even the generalisation is made known where the factor-structure is a semigroup. As a simple application of the skew product is obtained the cross product of NOETHER too. The introduction of the notions of direct product and direct sum follows, with the fundamental decomposition theorems. Semigroups, groups and rings, free or defined by equations, and the corresponding notions for structures with operators are introduced by a very elegant new method. Beside vector spaces and algebras the author introduces the notion of double vector space and double algebra. For these there are proved similar theorems as for the former, and important structures are derived from them as special cases: semigroups-ring, polynomial-ring, complete matrix ring, alternating ring, complex ring, and the field of quaternions. In the further part of the chapter beside the exhaustive treatment of the double algebras mentioned before, linear transformations and groups and the simpleness of alternating groups are discussed. At last, determinant theory is built up in general rings with unit element.

The fourth chapter investigates the connection between ideals and divisibility in case of arbitrary rings. Making use of the results attained, a very elegant treatment is given to several theorems of elementary number theory in euclidean rings (non necessarily commutative), the factorisation problems of the rings of polynomials over a skew field, and the theorem of Gauss. The last paragraph contains an elegant and simple exposition of the number theory of quaternion integers.

The centre of the fifth chapter is the fundamental theorem of finite abelian groups, and as a counterpart of it, the theorem of Hajós (which seems to be independent of the fundamental theorem). The latter is proved with the essentially simplified method of Rédei—Szele. The chapter is closed by an investigation of the multiplicative group of finite cyclical rings with unit element.

The following sixth chapter brings the proof of the fundamental theorem of finitely generated abelian groups based on the discussion of determinant divisors and elementary divisors. Then follows the exposition of the theory of systems of linear equations over a skew field making use of Steinitz's Austauschsatz.

The seventh chapter begins with the classical algebraic investigations on rings of polynomials over a ring with unit element (differential quotient, fundamental theorem of symmetric polynomials, resultant, discriminant, formulas of Newton and Waring, interpolation). Then we get acquainted with the Kronecker method of factorization of a polynomial over an integral domain and with Eisenstein's general irreducibility theorem. Very remarkable moments are the discussion of the Kronecker—Hensel theorem describing every ideal of the polynomial rings over commutative euclidean rings, and the description of the rings generated by a single element with help of this theorem.

In the next chapter the theory of commutative fields is discussed. The main point of this chapter is the classical theory of Steinitz in modern presentation (lemma of Kuratowski—Zorn is used instead of well-ordering theorem). Concerning finite fields, the theorem of König—Rados and Wedderburn are also made known here.

The investigation of ordered structures occupies the ninth chapter. After the discussion of ring extensions with unit element we find the results of Johnson, Szele and Artin—Schreier giving necessary and sufficient conditions that a module, ring, skew field or field can be ordered. This is followed by the discussion of archimedean and non-archimedean ordering and absolute value.

The tenth chapter deals with valuation theory. After the general theory of perfect fields follows the classical investigation of the field of real and complex numbers including the fundamental theorem of classical algebra. Then follow the archimedean, exponential, discrete and p-adic valuations and their applications, in particular the theorems of Ostrowski on the valuations of the rational number field and on archimedean valued fields.

In the last chapter we encounter the theory of Galois and its applications. The first application is the theorem of Stickelberger on the discriminant of a polynomial over a finite field, then, as a consequence of it, we obtain the proof of the quadratic reciprocity law. Other important applications follow, the discussion of cyclotomic polynomials, the investigation of the solvability of equations, and of geometrical constructibility. Worth mentioning is in the case of cubic and quartic equations over finite fields of characteristic greater than three the decision of the question as to how many of the roots of the equation are contained in the base field with help of the discriminant. The chapter is closed by the simple new proof of the theorem stating that every Galois-field has a normal basis.

Even this brief survey perhaps is able to illustrate how extensive a material is comprised in Rédei's book in a very elegant and on many points new treatment. We hope that the following volumes of this work will enrich mathematical literature in a similar degree within a short time.

T. Szele—J. Szendrei

Rudolf Fueter, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. II), 180 Seiten, Basel, Verlag Birkhäuser, 1945.

Das vorliegende Buch bietet eine Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Das Ziel des Buches ist, wie aus dem Vorwort hervorgeht, diejenigen Kenntnisse aus der analytischen Geometrie zu vermitteln, die der Studierende sich in seinen ersten Semestern zum Verständnis der übrigen mathematischen und physikalischen Vorlesungen aneignen muß. Vermöge des elementaren und einführenden Charakters des Buches wird im wesentlichen metrische Geometrie betrachtet, kurz berührend einige projektivgeometrische Grundbegriffe (wie die homogenen Koordinaten des Punktes, das Prinzip der Dualität). Die Betrachtung geht bis zu den Raumflächen zweiten Grades: es werden ihre speziellen Gleichungen und ihre grundlegenden Eigenschaften besprochen.

Der allgemeine Fall der quadratischen Formen von drei Variablen wird nicht behandelt, es wird nur das Resultat der Hauptachsentransformation ausgesprochen.

In der Darstellungsweise gelingt es dem Autor die vortrefflich berücksichtigten didaktischen Gesichtspunkte mit vollständiger Exaktheit und Klarheit aufs glücklichste zu vereinen.

J. Szendrei

W. J. Trjitzinsky, Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables (Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule CXXV), 93 p., Paris, Gauthier-Villars, 1954.

Le but de cet ouvrage est d'appliquer les méthodes de totalisation à la solution de l'équation $u_{xx}+u_{yy}=-f(x,y)$ de Poisson, ou plutôt à la généralisation suivante de celle-ci: la fonction $f(x,y)$ étant donnée dans le rectangle ouvert S, on cherche toutes les fonctions $u(x,y)$ telles que les dérivées $u_x(x,y)$ et $u_y(x,y)$ soient continues sur S et que la dérivée ordinaire de la fonction d'intervalle $F(I)=\int\limits_{(I)}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$ (la dérivée étant prise selon la normale intérieure et l'intégrale étant calculée le long du contour de l'intervalle I au sens positif) soit égale à $f(x,y)$ partout sur S.

En supposant que, pour une fonction $f(x,y)$ donnée, ce problème possède au moins une solution $u(x,y)$, l'auteur démontre à l'aide d'un théorème de Denjoy qu'il existe un ensemble fermé F, non dense sur S, tel que $f(x,y)$ soit bornée sur tout ensemble fermé $F_1\subset S-F$. Il construit ensuite une suite finie ou dénombrable de cercles $\Gamma_i\subset S-F$, $\Gamma_i\Gamma_j=0$ pour $i\neq j$, et tels que tout ensemble fermé $F_1\subset S-F$ n'ait de points communs qu'avec un nombre fini des cercles Γ_i. Il donne alors une décomposition $f(x,y)=f_0(x,y)+\psi(x,y)$ de façon que $f_0(x,y)$ soit sommable sur $S-F$ et que $\psi(x,y)$ soit continue sur $S-F$, qu'elle ne dépende que de la distance au centre dans chaque cercle Γ_i et qu'elle s'annule à l'extérieur de ceux-ci. Des fonctions de ce type figurent dans une note de Brelot; en donnant une forme plus précise aux résultats de Brelot, l'auteur parvient à démontrer que toute solution $u(x,y)$ du problème doit avoir sur $S-F$ la forme $u(x,y)=u_0(x,y)+w(x,y)$, où

$$u_0(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S-F}f_0(\xi,\eta)\log r^{-1}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

avec $r(x,y;\xi,\eta)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ et où $w(x,y)$ est de type suivant: $w(x)$ est continue sur $S-F$; à l'intérieur du cercle Γ_i on a

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma_i}\psi(\xi,\eta)\log r^{-1}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+h_i(x,y),$$

où $h_i(x,y)$ est harmonique à l'intérieur de Γ_i; tandis que sur $S-F-\Sigma\Gamma_i$ on a $w(x,y)=$

$= v(x, y)$, la fonction $v(x, y)$ étant harmonique sur $S-F$, exception faite des centres (x_i, y_i) des cercles Γ_i; en (x_i, y_i) $v(x, y)$ possède la partie principale $c_i \log r^{-1}(x, y; x_i, y_i)$ avec

$$c_i = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_i} \psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Pour trouver toutes les solutions du problème, il faut donc déterminer l'ensemble F, construire les fonctions $f_0(x, y)$ et $\psi(x, y)$ de la façon indiquée par l'auteur, construire une fonction $v(x, y)$ par la méthode de Brelot, calculer les fonctions $h_i(x, y)$, chacune étant la solution d'un problème de Dirichlet à l'intérieur du cercle Γ_i, et on obtient toutes les solutions sur l'ensemble $S-F$ en ajoutant à $v(x, y)$ une fonction harmonique quelconque. En prolongeant par continuité les fonctions obtenues sur l'ensemble F, on obtient les solutions cherchées, mais, en général, d'autres fonctions aussi, parmi lesquelles les solutions du problème sont encore à choisir. La question du choix convenable de la fonction harmonique ajoutée à $v(x, y)$ reste encore ouverte et ne semble plas être très facile.

Ákos Császár

Louis de Broglie, Éléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire (Traité de physique théorique et de physique mathématique, ouvrages réunis par Jean-Louis Destouches, tome III), VIII + 302 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

L'ouvrage reproduit l'essentiel du cours que l'auteur a professé à l'École Normale Supérieure depuis 1934. On y trouve — dans le cadre d'un manuel — la théorie de Maxwell et la théorie des électrons, la théorie de la relativité restreinte, la mécanique statistique classique, la théorie du rayonnement, la théorie quantique de l'atome de Bohr—Sommerfeld, la mécanique ondulatoire, la théorie de Dirac et des statistiques quantiques. L'ouvrage se recommande par la clarté de l'exposition et par la manière didactique dont l'auteur a ordonné sa matière.

J. I. Horváth

Vera Myller-Lebedev, Lecţii de algebră [Vorlesungen über Algebra], 396 Seiten, Auflage der Akademie der Rumänischen Volksrepublik, Bukarest, 1953. (Rumänisch.)

Ein im Universitätsunterricht gut verwendbares Lehrbuch der Algebra, welches nicht nur den Gegenstand der einführenden Vorlesungen (Determinanten; Begriff der reellen und der komplexen Zahlen; lineare, bilineare, quadratische und hermitesche Formen; Polynome, Eliminationen usw.), sondern auch die Galoissche Theorie umfaßt. Die Behandlungsweise steht derjenigen von Perron's *Algebra* am nahesten. Eine reiche Aufgabensammlung (auf 150 Seiten) erhöht den Wert des Buches.

J. Szendrei

Wolfgang Haack, Darstellende Geometrie, Bd. I-II (Sammlung Göschen Bd. 142—143), 110 + 129 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1954. —DM 2.40 + 2.40 (geheftet).

Band I beginnt mit einer allgemeinen Einleitung über die Rolle und die geschichtliche Entwicklung der darstellenden Geometrie. Dann folgt ein sehr guter und systematischer Überblick der wichtigsten Darstellungsmethoden. Die weiteren Kapiteln dieses Bandes behandeln die Grundaufgaben der Zweitafelprojektion samt zahlreichen Anwendungen auf die ebenflächigen Körper, die Theorie der axialen Affinität, und auf Grund dieser Theorie einige Ellipsenkonstruktionen. Inzwischen macht uns Verf. mit einem speziellen System der Kavalierperspektive und mit dem Übertragungsverfahren in dieses System bekannt. Dieses Verfahren findet später mehrere Anwendungen zur Herstellung anschaulicher Bilder.

In den ersten drei Kapiteln vom Band II handelt es sich um die Zweitafelprojektion der Dreh- und Schraubenflächen. Das zweite von ihnen behandelt die für die technischen

Anwendungen wichtigsten Durchdringungsaufgaben von Zylindern, Kegeln und Kugeln, mit besonderem Rücksicht auf die zerfallenden und die in einen einzigen Kegelschnitt entarteten Durchdringungen. Im letzten Kapitel dieses Bandes sind die Grundelementen und praktische Anwendungen der kotierten Projektion beschrieben.

Ein drittes Band über die Zentralprojektion ist in Vorbereitung.

Es zeigt sich aus den Fragestellungen und dem Stil dieses Werkes, daß Verf. besonders die in der alltäglichen Praxis vorkommenden Problemem der Darstellenden Geometrie vor Augen gehalten hat. Bei der Darstellung der Ebene macht er uns z. B. aufmerksam darauf, daß Ebenen mit Spurendarstellung bei technischen Anwendungen nur selten vorkommen, und dementsprechend spielen die Ebenen mit Spurendarstellung in der ganzen Erörterung keine grundlegende Rolle. Auch die Umlegung der Ebene wird zuerst um eine Hauptlinie ausgeführt.

Während die praktischen Gesichtspunkte in erfreulicher Weise gut in den Vordergrund der ganzen Behandlung gestellt sind, werden die theoretischen Gesichtspunkte nicht überall mit der gleichen Aufmerksamkeit berücksichtigt. Es ist auffallend, daß für die Konstruktion der Durchdringung ebenflächiger Körper nur einzelne Beispiele gegeben sind, und es fehlen die allgemeinen Überlegungen. Die theoretische Ungenauigkeit ist besonders auffallend an den folgenden Stellen: in Bd. I, bei der Orthogonalitätsbedingung einer Geraden zu einer Ebene (wo der Verf. eine — übrigens wohlbekannte — Bedingung als notwendige beweist, trotzdem als hinreichende ausspricht); in Bd. II, bei der Behandlung der Tangenten und der Tangentenebene einer krummen Fläche in einem Punkt (wo er das Problem der singulären Punkte noch nicht aufwirft), oder bei der Behandlung der Ellipse als Kegelschnitt (wo aus den vorigen nicht der Satz an der Seite 32 mit kursivem Druck, sondern gerade seine Umkehrung folgt, und der Beweis für die Äquivalenz der beiden Definitionen fehlerhaft ist).

Trotz diesen kleineren Schönheitsfehlern besitzt das Werk einen großen praktischen und didaktischen Wert, den die zahlreichen schönen und übersichtlichen Abbildungen noch erhöhen.

G. Szász

W. Maak, Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen (Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. I, 1. Teil, Heft 7/I), 26 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner, 1953.

Als J. v. Neumann 1934 den ursprünglichen Bohrschen Begriff der fastperiodischen (fp.) Funktionen zum Begriff der „fp. Funktionen auf Gruppen" erweitert und die innigen Zusammenhänge dieses Begriffes mit den beschränkten Matrixdarstellungen der Gruppe entdeckt hat, wurde die Theorie der fp. Funktionen mit der Gruppentheorie verknüpft. Natürlich wurde sie damit noch kein Kapitel der Algebra geworden, doch scheint es durchaus berechtigt, über sie im Rahmen des Algebra-Bandes der Enzyklopädie zu berichten.

Verf. ist einer der besten Kenner und erfolgreichsten Forscher dieses Gebietes, dem wir auch ein Lehrbuch der modernen Theorie der fp. Funktionen verdanken (Springer-Verlag, 1950).

Die fp. Funktionen werden in dem vom Verf. stammenden „kombinatorischen" Wege eingeführt und es wird auf die Existenz anderer Einführungsmöglichkeiten nur kurz hingewiesen. Das ist zu bedauern, da man in einem Enzyklopädieartikel mindestens die ursprünglichen Definitionen hätte finden können. Es wird dann ausführlich über den Mittelwertsatz und über die Zusammenhänge mit den beschränkten Darstellungen berichtet (Orthogonalitätseigenschaften; Fourier-Reihen; Eindeutigkeitssatz; Aufspaltung invarianter Moduln; Approximationssatz; Summierungsmethoden der Fourier-Reihen, usw.). Dann werden verschiedene Verallgemeinerungen besprochen (Weyl-fp. Funktionen, ω-fp. Funktionen; allgemeinere Wertebereiche: fp. Funktionen auf Halbgruppen). Endlich werden unter „Anwendungen und Anwendungsmöglichkeiten" die Bohrschen fp. Funktionen und die Kugel-funktionen erwähnt, die maximal- und minimal-fp. Gruppen definiert und diskutiert, und über die Dualitätssätze von Pontrjagin und Tannaka berichtet. Obwohl die Besprechung der minimal-fp. Gruppen es vielleicht nahelegen hätte, den Gelfand—Rajkovschen Satz über die Vollständigkeit des Systems aller irreduzibler unitärer (endlich oder unendlichdimensionaler) Darstellungen einer lokalkompakten Gruppe zu erwähnen, doch geht der Bericht nicht über die Rahmen endlichdimensionaler Darstellungen.

B. Sz.-N.

M. L. Dubreil-Jacotin—L. Lesieur—R. Croisot, Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques (Cahiers scientifiques, fasc. XXI), VIII + 386 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1953. — 5500 fr.

Ce livre, conformément à son titre, se compose de trois parties. La première partie, élaborée par M. Croisot, traite des fondaments de la théorie des treillis abstraits. Après une étude détaillée de la théorie des ensembles partiellement ordonnés l'auteur passe aux cas spéciaux des demi-treillis et des treillis. Ensuite l'auteur fournit la définition algébrique de ces structures et démontre l'indépendance des équations qui les définissent. Le chapitre suivant développe les propriétés les plus importantes des demi-treillis et treillis complets et conditionnellement complets. L'auteur traite ensuite d'homomorphismes, d'isomorphismes et des produits cardinaux des treillis et des demi-treillis, puis il discute en détail la structure des treillis modulaires, distributifs et semi-modulaires. On y trouve plusieurs théorèmes propres à l'auteur, très importants pour les treillis de longueur infinie, notamment quant à la définition de la semi-modularité et quant à l'exposition des implications logiques entre telles propriétés qui sont équivalentes dans le cas des treillis de longueur finie. Un exposé sur les treillis complémentés et relativement complémentés et la discussion de l'union-indépendance terminent la première partie du livre.

La seconde partie, élaborée par Mme Dubreil-Jacotin, traite des structures algébriques ordonnées (c'est-à-dire des structures dans lesquelles une relation d'ordre est aussi définie), et particulièrement des demi-groupes demi-réticulés et des groupes réticulés. Cette partie commence par développer les propriétés générales et les éléments particuliers (éléments entiers, premiers, primaires, etc.) des groupoïdes et des groupes ordonnés. Dans le chapitre suivant on définit le résiduel et en précise les propriétés fondamentales; on traite des groupoïdes résidués (particulièrement des groupoïdes résidués demi-réticulés et réticulés) et discute la théorie des demi-groupes ordonnés archimédiens. Deux chapitres sont consacrés à la théorie générale des congruences et des idéaux et des rapports entre congruences et idéaux dans les différentes structures; en passant, il est aussi question des congruences régulières par rapport à la relation d'ordre et de la structure du treillis des idéaux. Enfin nous prenons connaissance du problème de la décomposition multiplicative, finie et univoque, des éléments des structures algébriques ordonnées, en tenant particulièrement compte du cas des demi-groupes demi-réticulés.

La troisième partie, élaborée par M. Lesieur, est consacrée aux applications géométriques de la théorie des treillis. La notion de "treillis géométrique" est introduite à l'aide des variétés linéaires et d'une condition de couverture ("l'union d'une variété linéaire et d'un point couvre la variété linéaire"); la dimension de ces treillis est définie à l'aide de l'union-indépendance abstraite. Après cette introduction il traite séparément des treillis géométriques à dimension finie et à dimension infinie, et il y démontre le théorème suivant très important: Pour qu'un treillis géométrique soit à dimension finie, il est nécessaire et suffisant qu'il satisfasse soit à la condition de chaîne ascendante, soit à la condition de chaîne descendante. La discussion générale se termine par l'énumération de quelques propriétés des produits cardinaux des treillis géométriques et par la théorie abstraite du parallélisme. L'auteur rappelle ensuite deux définitions équivalentes pour les treillis projectifs ou, autrement dit, pour les géométries projectives: l'une est conçue comme le complément du système d'axiomes des treillis géométriques généraux par le dual de la condition de couverture ci-dessus mentionnée, l'autre est définie par la condition supplémentaire de modularité. On passe alors aux géométries projectives à dimension finie et infinie et aux décompositions de ces géométries en géométries projectives irréductibles, aux géométries projectives affaiblies (où le dual de la condition de couverture est affaibli) et comme cas particulier de celles-ci aux géométries affines et affines généralisées. L'auteur expose en même temps dans ses détails la théorie du parallélisme appliquée aux géométries affines généralisées. Un chapitre séparé est réservé au développement analytique des géométries affines à deux dimensions, dans lequel des types spéciaux et leur caractérisation par la "structure algébrique associée" sont placés au premier plan. Le dernier chapitre fixe quelques rapports entre espaces vectoriels et géométries affines et projectives.

Cette revue de la matière traitée fait voir que l'ouvrage n'a pas l'ambition d'exposer les applications de la théorie des treillis de façon aussi exhaustive que l'a fait M. G. Birkhoff dans sa "Lattice theory". Son intention n'est que, d'une part, de développer les notions et les théorèmes fondamentaux de la théorie abstraite des treillis, et d'autre part, de traiter des applications algébriques et géométriques dont n'existait jusqu'à présent aucun ouvrage d'ensemble. Au cours des exposés ressortent bien les avantages de l'application des notions et des méthodes de la théorie des treillis.

Les traits principaux de l'ouvrage sont: l'analyse profonde des notions et des conditions des théorèmes au moyen de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis, l'interprétation sous plusieurs faces des concepts nouveaux en les douant de nombreuses propriétés caractéristiques, enfin le souci accordé aux détails. De tout ceci il résulte que le livre n'est pas d'une lecture aisée; mais, pour les lecteurs quelque peu instruits d'algèbre abstraite, l'étude en est aussi fructueuse qu'intéressante.

Chacun des chapitres est suivi de quelques exercices pour compléter et plus encore pour expliquer les résultats acquis.

G. Szász

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

Prix d'abonnement pour l'étranger $ 6.—. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, VI., Sztálin-út 21).

Engedélyezési szám: 876/169/8379/54.

Formátum B/5. Terjedelem 9 A/5 ív. Példányszám 520.

Felelős szerk.: Szőkefalvi-Nagy Béla. Nyomdábaadás ideje: 1954. III. 11. Megjelenés: 1954. XI. 15.

Kiadja a Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, V., Szalay-u. 10—14.
Kiadásért felel a Tankönyvkiadó vállalat igazgatója.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 53-1728 Felelős vezető: Vincze György